EINFÜHRUNG IN DIE FUNKTIONENTHEORIE WINTERSEMESTER 2018/19 TU KAISERSLAUTERN

PATRICK WEGENER

Contents

Date: April 1, 2020.

1. Einführung

In einer in das Mathematikstudium einführenden Vorlesung (wie der Grundlagen der Mathematik) wird die Theorie der Differential- und Integralrechnung in einer reellen Variable eingeführt. Die Funktionentheorie behandelt die Differential- und Integralrechnung in einer **komplexen** Variable.

Die Anwendungen und die Motivation sich mit der Funktionentheorie zu beschäftigen sind vielfältig. Viele bekannte und wichtige Funktionen aus der reellen Analysis werden wir auch als komplex differenzierbare Funktionen in der Funktionentheorie wiedertreffen (z.B. die Exponentialfunktion oder die trigonometrischen Funktionen). Viele ihrer Eigenschaften offenbaren sich einem dabei erst dann richtig, wenn man sie als komplexe Funktionen betrachtet.

Ebenso lassen sich viele reelle Integrale erst dann lösen, wenn wir sie als komplexe Integrale auffassen.

Alles weitere werden wir dann im Laufe des Semesters kennenlernen.

Eine kurze Erläuterung zur Notation: Erinnerungen an den Inhalt einer Grundlagen der Mathematik Vorlesung oder den Inhalt einer äquivalenten Vorlesung zur Analysis sind im Skript in blauer Schrift gehalten. In der Regel sind dies Definitionen aus der (mehrdimensionalen) rellen Analysis, die wir der komplexen Analysis entgegenstellen und vergleichen wollen. In wenigen Fällen benutzen wir tiefergehende Resultate ohne diese zu beweisen. Diese sind in grüner Schrift gehalten, dienen aber nur dazu um gelegentlich über den “Tellerrand” zu schauen und sind für den allgemeinen Zusammenhang der Vorlesung nicht entscheidend. Ergänzende Erläuterungen sind in roter Schrift gehalten.

Sollten ihnen Fehler auffallen, so schicken Sie mir bitte eine Email!

2. Die komplexen Zahlen

2.1. **Der Körper $\mathbb{C}$.** Die Menge $\mathbb{R}^2$ zusammen mit den Verknüpfungen

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) + (x_2, y_2) &:= (x_1 + x_2, y_1 + y_2)\\ (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) &:= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1),\end{aligned}$$

wobei $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, ist ein Körper.

Schreiben wir x statt $(x, 0)$ und i statt $(0, 1)$, so können wir jedes Element aus $\mathbb{R}^2$ als $x+iy$ schreiben. Wir setzen dann

$$\mathbb{C} := \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

Die obigen Verknüpfungen übertragen sich dann auf die Menge $\mathbb{C}$ wie folgt:

$$\begin{aligned}(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) &:= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)\\ (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) &:= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).\end{aligned}$$

Wir nennen die Menge $\mathbb{C}$ zusammen mit dieser Addition und Multiplikation den Körper der komplexen Zahlen.

Bemerkung 2.1.
(1) $i^2 = -1$.
(2) Das Nullelement ist $0 = 0 + i \cdot 0$, das Einselement ist $1 = 1 + i \cdot 0$.
(3) Das Inverse zu $x + iy \neq 0$ ist
$$\frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}.$$
(4) Siehe oben: $\mathbb{C} \to \mathbb{R}^2, x+iy \mapsto (x, y)$ liefert einen Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Vektorräumen.
(5) $\mathbb{R}$ ist Unterkörper von $\mathbb{C}$: Die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{C}, x \mapsto x + i \cdot 0$ ist ein injektiver Körperhomomorphismus.

Definition 2.2. Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ definieren wir:
(1) $\operatorname{Re} z := x \in \mathbb{R}$, der Realteil von z.
(2) $\operatorname{Im} z := y \in \mathbb{R}$, der Imaginärteil von z.
(3) $\overline{z} := x - iy \in \mathbb{C}$, die zu z komplex konjugierte Zahl.
(4) $|z| := \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, der Betrag von z.

Lemma 2.3 (Eigenschaften der komplexen Konjugation)**.** Für $z, w \in \mathbb{C}$ gelten:
(1) Die Abbildung $z \mapsto \overline{z}$ ist die Spiegelung an der reellen Achse, siehe Abbildung 1.
(2) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.
(3) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.
(4) $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ und $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$.
(5) $z \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; z = \overline{z}$.
(6) $z \in i\mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; z = -\overline{z}$.

Lemma 2.4 (Eigenschaften des Betrags)**.** Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Dann gilt:
(1) $|\overline{z}| = |z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$.
(2) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$.
(3) $|z + w| \leq |z| + |w|$.

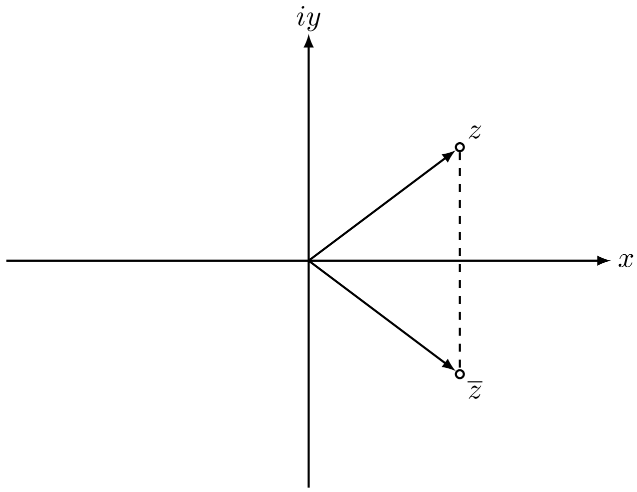


Abbildung 1. Komplexe Konjugation

Beweis. Wir zeigen nur Teil (2). Dies folgt aus

$$\begin{aligned}|zw|^2 &\overset{(1)}{=} zw \cdot \overline{zw} \overset{(2.4(3))}{=} zw\overline{z}\overline{w} \\ &= z\overline{z}w\overline{w} \overset{(1)}{=} |z|^2 \cdot |w|^2.\end{aligned}$$

□

2.2. **Konvergenz von Folgen und Reihen.** Die Abbildung

$$d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, (z, w) \mapsto |z - w|$$

ist nach Lemma 2.4 eine Metrik auf $\mathbb{C}$; diese heißt die euklidische Metrik auf $\mathbb{C}$. Den so erhaltenen metrischen Raum $(\mathbb{C}, |.|)$ können wir mit dem metrischen Raum $(\mathbb{R}^2, \|.\|_2)$ identifizieren. Wenn wir nun (wie im Folgenden) etwa Begriffe wie den der Konvergenz bzgl. $(\mathbb{C}, |.|)$ definieren, können wir auch analog den Konvergenzbegriff bzgl. $(\mathbb{R}^2, \|.\|_2)$ verwenden.

Definition 2.5 (Konvergenz von Folgen und Reihen)**.**

(1) Eine Folge komplexer Zahlen $(z_n)_n$ heißt konvergent gegen $z \in \mathbb{C}$, wenn gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \ |z_n - z| < \epsilon \ \forall n \geq N.$$

In diesem Fall heißt z der Grenzwert der Folge und wir schreiben $\lim_{n\to\infty} z_n = z$.

(2) Ist $(z_n)_{n\geq k}$ eine Folge komplexer Zahlen, so heißt die Reihe $\sum_{n=k}^{\infty} z_n$ konvergent mit Wert $z \in \mathbb{C}$, wenn die Folge der Partialsummen $(s_m)_{m\geq k}$, wobei $s_m := \sum_{n=k}^{m} z_n$, gegen z konvergiert. In diesem Fall schreiben wir

$$z = \sum_{n=k}^{\infty} z_n = \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{n=k}^{m} z_n \right) = \lim_{m\to\infty} s_m$$

Lemma 2.6. Für eine Folge $(z_n)_n$ komplexer Zahlen sind äquivalent:

(i) $(z_n)_n$ ist konvergent;

(ii) $(\operatorname{Re} z_n)_n$ und $(\operatorname{Im} z_n)_n$ sind konvergent.

Dann gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_n + i \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Im} z_n$.

Beweis. Siehe Übungsblatt 0. □

Bemerkung 2.7. Die analoge Aussage gilt auch für komplexe Reihen.

Lemma 2.8. Für eine konvergente Folge $(z_n)_n$ komplexer Zahlen gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \overline{z_n} = \overline{\lim_{n\to\infty} z_n}.$$

Mit anderen Worten: Die Folge $(\overline{z_n})_n$ konvergiert gegen $\overline{z}$, wobei $z = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$.

Beweis. Sei $z = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = x + iy$ und $z_n = x_n + iy_n$ für $x, x_n, y, y_n \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
|\overline{z_n} - \overline{z}| &= |(x_n - x) + i(y - y_n)| \\
&= \sqrt{(x_n - x)^2 + (y - y_n)^2} \\
&= \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} \\
&= |(x_n - x) + i(y_n - y)| = |z_n - z|
\end{aligned}$$

□

Definition 2.9. Eine Reihe $\sum_{n=k}^{\infty} z_n$ komplexer Zahlen heißt absolut konvergent, wenn die Reihe $\sum_{n=k}^{\infty} |z_n|$ konvergiert (in $\mathbb{R}$).

Bemerkung 2.10. Jede absolut konvergente Reihe $\sum_{n=k}^{\infty} z_n$ komplexer Zahlen ist konvergent und $|\sum_{n=k}^{\infty} z_n| \leq \sum_{n=k}^{\infty} |z_n|$.

Beweis. Mit Lemma 2.6 und Lemma 2.4 (3) folgt die Aussage aus der entsprechenden Aussage in $\mathbb{R}$ (siehe [GdM, Satz 4.49]). □

Analog zum Reellen (siehe [GdM, Satz 4.50 und Satz 4.52]) lassen sich Kovergenzkriterien für komplexe Reihen formulieren (siehe Übungsblatt 0):

Lemma 2.11 (Quotientenkriterium)**.** Es sei $\sum_{n=k}^{\infty} z_n$ eine Reihe komplexer Zahlen. Gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $0 < \lambda < 1$ und ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \leq \lambda$$

für alle $n \geq N$ (und insbesondere $z_n \neq 0$ für $n \geq N$). Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=k}^{\infty} z_n$ absolut.

Übung 2.12. Beweisen Sie das Quotientenkriterium für komplexe Reihen. Formulieren und beweisen Sie das Wurzelkriterium für komplexe Reihen.

2.3. Komplexe Funktionen.

Lemma 2.13. Sei $z \in \mathbb{C}$. Dann konvergieren die folgenden Reihen:

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$

Beweis. Wir beweisen nur (1). Für (2) und (3) siehe Übungsblatt 0. Für $z = 0$ ist die Konvergenz klar. Sei also $z \neq 0$. Wegen

$$\left| \frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}} \right| = \left| \frac{z}{n+1} \right| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

finden wir ein $0 < \lambda < 1$ mit $|\frac{z_{n+1}}{z_n}| < \lambda$. Nach Quotientenkriterium konvergiert die Reihe absolut. Aus Bemerkung 2.10 folgt die Konvergenz. □

Aufgrund dieses Lemmas können wir nun die folgenden komplexen Funktionen definieren:

Definition 2.14.

(1) Die Funktion
$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \ z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$
heißt komplexe Exponentialfunktion.

(2) Die Funktion
$$\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \ z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
heißt komplexer Sinus.

(3) Die Funktion
$$\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \ z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$
heißt komplexer Kosinus.

Bemerkung 2.15.

(a) $\exp(z + w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$.

(b) $\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Beweis. Aussage (a) folgt mit Hilfe des Cauchy-Produktes, siehe [GdM, Lemma 4.69]. Aussage (b) folgt aus Lemma 2.3 (2) und Lemma 2.8, siehe auch [GdM, Lemma 4.69]. □

ENDE ERSTE VORLESUNG

Lemma 2.16 (Euler)**.** Für $z \in \mathbb{C}$ gilt
$$\exp(iz) = \cos(z) + i \sin(z).$$
Insbesondere gilt
$$\exp(i\pi) = -1.$$

Beweis.
$$\sum_{n=0}^{2m+1}\frac{(iz)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{m}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+i\sum_{n=0}^{m}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$
Die Behauptung folgt, indem wir auf beiden Seiten den Grenzwert nach m bilden. □

Folgerung 2.17. *Sei $z=x+iy\in\mathbb{C}$. Dann gelten:*
(a) $\cos(z)=\frac{1}{2}(\exp(iz)+\exp(-iz))$*;*
(b) $\sin(z)=\frac{1}{2i}(\exp(iz)-\exp(-iz))$*;*
(c) $\exp(z)=\exp(x)(\cos(y)+i\sin(y))$*.*

Beweis. Unmittelbar aus den Definition des komplexen Sinus und des komplexen Kosinus folgen $\cos(-z)=\cos(z)$ und $\sin(-z)=-\sin(z)$. Aus Lemma 2.16 folgt:
$$\exp(-iz)=\cos(-z)+i\sin(-z)=\cos(z)-i\sin(z).$$
Hiermit lassen sich (a) und (b) direkt folgern. Teil (c) gilt, denn
$$\exp(z)\overset{(2.15)}{=}\exp(x)\cdot\exp(iy)\overset{(2.16)}{=}\exp(x)(\cos(y)+i\sin(y)).$$
□

Bemerkung 2.18. Man beachte, dass im Allgemeinen **nicht** $\cos(z)=\mathrm{Re}(\exp(iz))$ und $\sin(z)=\mathrm{Im}(\exp(iz))$ gelten. In der Regel sind $\sin(z)$ und $\cos(z)$ nicht einmal reelle Zahlen.

Bemerkung 2.19. Es sei $\mathbb{S}^1:=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=1\}$ die (komplexe) Kreislinie. Wir verwenden eine nicht-triviale Aussage (die wir aber nicht beweisen wollen, da sie einiges an Gruppentheorie und Topologie verwendet):

Die Abbildung $p:\mathbb{R}\to\mathbb{S}^1,\varphi\mapsto\exp(i\varphi)$ ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus von der additiven Gruppe $\mathbb{R}$ auf die multiplikative Gruppe $\mathbb{S}^1$ mit Kern $2\pi\mathbb{Z}$.

(Dass p ein Homomorphismus ist, haben wir in Bemerkung 2.15 gesehen.) Die Abbildung p hat man sich als Aufrollen der Zahlengerade auf den Kreis mit Umfang 2π vorzustellen. Ist nun $z\in\mathbb{C}$, so ist $\frac{z}{|z|}\in\mathbb{S}^1$ und aufgrund der Surjektivität von p gibt es ein $\varphi\in\mathbb{R}$ mit
$$\frac{z}{|z|}=\exp(i\varphi)\ \Rightarrow\ z=|z|\exp(i\varphi)=|z|(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi)).$$
Fordern wir $\varphi\in[0,2\pi)$, so ist diese Darstellung sogar eindeutig (da der Kern von p durch $2\pi\mathbb{Z}$ gegeben ist). Hierbei heißen $|z|$ und φ die Polarkoordinaten von z (siehe Abbildung 2).

Der Winkel φ ist dann durch den Winkel gegeben, den z mit der reellen Halbachse einschließt.

Sind $z_1=|z_1|\exp(i\varphi_1),z_2=|z_2|\exp(i\varphi_2)\in\mathbb{C}$ in Polarkoordinaten gegeben, so gilt nach Bemerkung 2.15
$$z_1\cdot z_2=|z_1|\cdot|z_2|\exp(i(\varphi_1+\varphi_2)),$$
d.h. bei der Multiplikation in Polarkoordinatendarstellung werden die Beträge multipliziert und die Winkel addiert.

Beispiel 2.20. Es sei $z=1+i\in\mathbb{C}$. dann ist $|z|=\sqrt{2}$ und z schließt mit der reellen Halbachse den Winkel $\varphi=\frac{\pi}{4}$ ein, d.h
$$z=1+i=\sqrt{2}\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right)$$

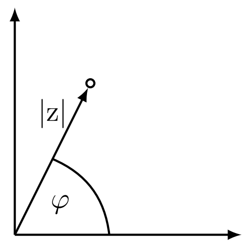


Abbildung 2. Polarkoordinaten

3. Komplexe Differenzierbarkeit

3.1. **Grenzwerte und Stetigkeit.**

Wir wiederholen kurz den Begriff des Grenzwertes einer Funktion (siehe [GdM, Kapitel 5].)

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ eine Teilmenge. Ein Punkt $x \in \mathbb{C}$ heißt Berührpunkt von D, wenn $B_\epsilon(x) \cap D \neq \varnothing$ für alle $\epsilon > 0$ gilt, wobei
$$B_\epsilon(x) = \{y \in \mathbb{C} \mid |x - y| < \epsilon\}$$
der ϵ-Ball um x ist.

Der Abschluss $\overline{D}$ von D ist dann die Menge aller Berührpunkte von D.

Lemma. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$. Dann ist $x \in \mathbb{C}$ genau dann ein Berührpunkt von D, wenn es eine Folge $(x_n)_n$ mit $x_n \in D$ gibt, die gegen x konvergiert.

Beweis. Der Beweis verläuft analog zum Beweis in $\mathbb{R}$, siehe auch [GdM, Lemma 5.3]. □

Sei weiterhin $D \subseteq \mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{C}$ eine Abbildung und $x \in \overline{D}$ ein Punkt aus dem Abschluss. Dann heißt $c \in \mathbb{C}$ der Grenzwert von $f(z)$ für $z \to x$, wenn gilt:
$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall z \in D : \ |z - x| < \delta \ \Rightarrow \ |f(z) - c| < \epsilon.$$
Wir schreiben $\lim_{z \to x} f(z) = c$.

Bemerkung 3.1. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{C}$ eine Abbildung und $x \in \overline{D}$. Dann gilt $\lim_{z \to x} f(z) = c$ genau dann, wenn $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = c$ für jede Folge $(x_n)_n$ in D mit $\lim_{n \to \infty} x_n = x$.

Beweis. Der Beweis erfolgt analog zu dem über $\mathbb{R}$. Wir zeigen hier beispielhaft eine Implikation:

Sei $\lim_{z \to x} f(z) = c$ und sei $(x_n)_n$ Folge in D mit $\lim_{n \to \infty} x_n = x$. Da der Limes von f für $z \to x$ existiert, gibt es zu $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit
$$|f(z) - c| < \epsilon \text{ für alle } z \in D \text{ mit } |z - x| < \delta. \tag{1}$$
Wegen der Konvergenz von $(x_n)_n$ gibt es nun ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x| < \delta$ für alle $n \geq N$. Nach (1) gilt somit $|f(x_n) - c| < \epsilon$ für alle $n \geq N$, d.h. $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = c$. □

Definition 3.2. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$. Eine Abbildung $f : D \to \mathbb{C}$ heißt stetig in $x \in D$, wenn $\lim_{z \to x} f(z) = f(x)$ gilt. Ist f stetig in jedem $x \in D$, so heißt f stetig auf D.

Lemma 3.3. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{C}$ eine Abbildung und $x \in D$. Dann sind äquivalent:

(i) f ist stetig in x;
(ii) für jede Folge $(x_n)_n$ in D mit $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ gilt $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x)$;

(iii) $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall z \in D :\ |z - x| < \delta\ \Rightarrow\ |f(z) - f(x)| < \epsilon.$

Beweis. Die Äquivalenz (i)$\Leftrightarrow$(iii) ist eine direkte Konsequenz aus den Definitionen von Grenzwert und Stetigkeit. Die Äquivalenz (i)$\Leftrightarrow$(ii) folgt aus Bemerkung 3.1. ☐

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$. Für eine Abbildung $f : D \to \mathbb{C}$ und $z \in D$ setze

$$f(z) = u(z) + iv(z),$$

wobei $u = \operatorname{Re}(f) : D \to \mathbb{R}, z \mapsto \operatorname{Re} f(z)$ der Realteil von f ist und $v = \operatorname{Im}(f) : D \to \mathbb{R}, z \mapsto \operatorname{Im} f(z)$ der Imaginärteil von f ist.

Lemma 3.4. Eine Abbildung f ist genau dann stetig, wenn $\operatorname{Re}(f)$ und $\operatorname{Im}(f)$ stetig sind

Beweis. Wir nutzen die Charakterisierung (ii) von Stetigkeit aus Lemma 3.3 und erhalten die Aussage dann aus Lemma 2.6. ☐

Beispiel 3.5.

(a) Summen, Produkte und Quotienten stetiger Abbildungen sind stetig (Beweis analog zu dem über $\mathbb{R}$).
(b) Die komplexe Konjugation $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \overline{z}$ ist stetig nach Lemma 3.4.
(c) Nach (a) und (b) sind Polynome und rationale Funktionen in z und $\overline{z}$ stetig.
(d) Die komplexe Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \exp(z)$ ist stetig: Für alle $z = x + iy \in \mathbb{C}$ gilt

$$\exp(z) \overset{(2.17)}{=} \exp(x)(\cos(y) + i\sin(y)) = \underbrace{\exp(x)\cos(y)}_{=\operatorname{Re}\exp(z)} + i\underbrace{\exp(x)\sin(y)}_{=\operatorname{Im}\exp(z)}.$$

Da $\operatorname{Re}\exp(z)$ und $\operatorname{Im}\exp(z)$ stetig sind, folgt die Stetigkeit von exp aus Lemma 3.4.

3.2. Differenzierbarkeit.

Definition. Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Dann heißt $D \subseteq \mathbb{K}$ offen, wenn zu jedem $a \in D$ ein $\epsilon = \epsilon(a) > 0$ exisitert mit $B_\epsilon(a) \subseteq D$.

Definition. Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ offen. Eine Abbildung $f : D \to \mathbb{R}$ heißt (reell) differenzierbar in $a \in D$, wenn der Grenzwert

$$f'(a) := \lim_{\substack{x \to a \\ x \in D\setminus\{a\}}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

in $\mathbb{R}$ existiert. Mit $h := x - a$ ist dies äquivalent zur Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Analog zur Differenzierbarkeit in $\mathbb{R}$ definieren wir:

Definition 3.6. Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine Abbildung $f : D \to \mathbb{C}$ heißt (komplex) differenzierbar in $a \in D$, wenn der Grenzwert

$$f'(a) := \lim_{\substack{z \to a \\ z \in D\setminus\{a\}}} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \tag{2}$$

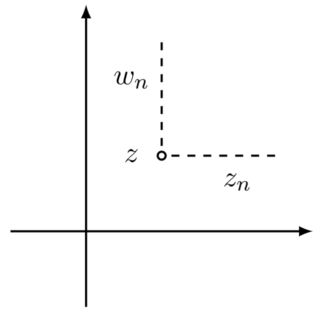


Abbildung 3. Komplexe Konjugation nicht komplex differenzierbar.

existiert. Mit $h := z - a$ ist dies äquivalent zur Existenz des Grenzwertes

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{3}$$

Beispiel 3.7.

(a) Die Potenzfunktion $f(z) = z^n$ $(n \in \mathbb{N})$ ist in jedem $a \in \mathbb{C}$ differenzierbar. Denn für jedes $a \in \mathbb{C}$ können wir schreiben:

$$f(z) = z^n = a^n + (z-a)(z^{n-1} + az^{n-2} + \cdots + a^{n-2}z + a^{n-1}).$$

Daher existiert der Grenzwert mit

$$f'(a) = \lim_{\substack{z \to a \\ z \in D \setminus \{a\}}} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = na^{n-1}.$$

Allgemeiner ist jedes Polynom $f(z) \in \mathbb{C}[z]$ auf ganz $\mathbb{C}$ differenzierbar.

(b) Die komplexe Konjugation $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = \overline{z}$ ist in keinem $a \in \mathbb{C}$ differenzierbar. Sei dazu $z \in \mathbb{C}$ und betrachte die Folgen

$$z_n := z + \frac{1}{n} \text{ und } w_n := z + \frac{i}{n} \ (n \geq 1).$$

(siehe auch Abbildung 3). Eine direkte Rechnung zeigt, dass

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(z_n) - f(z)}{z_n - z} = 1 \neq -1 = \lim_{n \to \infty} \frac{f(w_n) - f(z)}{w_n - z}.$$

Nach Bemerkung 3.1 kann der Grenzwert in Definition 3.6 somit nicht exitieren, d.h. f ist nicht komplex differenzierbar in $z \in \mathbb{C}$.

(c) Die Funktion $f(z) = \mathrm{Re}(z)$ ist in keinem $a \in \mathbb{C}$ differenzierbar. Mit $h := z - a$ können wir schreiben

$$\frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\mathrm{Re}(h)}{h}.$$

Für $h \in \mathbb{R}$ hat dieser Differenzenquotient somit den Wert 1, aber für $h \in i\mathbb{R}$ den Wert 0. Wie in (b) können wir nun argumentieren, dass kein Limes exisitiert.

Analog kann man zeigen, dass die Funktionen $f(z) = \mathrm{Im}(z)$ und $f(z) = |z|$ nicht differenzierbar sind.

(d) Komplexe Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit.

Definition. Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine Abbildung $f : D \to \mathbb{R}^m$ heißt (reell) differenzierbar in $a \in D$, wenn es eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gibt, so dass

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}} \frac{\|f(a+h) - f(a) - A\cdot h\|}{\|h\|} = 0, \tag{4}$$

wobei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm auf dem $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Die Matrix A heißt Differential von f an der Stelle a.

Wie im Fall $n = m = 1$ gilt auch im allgemeinen Fall, dass f genau dann in $a \in D$ (reell) differenzierbar ist, wenn gilt

(a) $f(x) = f(a) + A\cdot(x-a) + r(x-a)$;
(b) $\lim\limits_{x\to a} \frac{r(x-a)}{\|x-a\|} = 0$

(siehe auch [GdM, Kapitel 18.1]).

Unter der Identifizierung $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2, x+iy \mapsto \begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}$ können wir eine Funktion $f := u + iv : D \to \mathbb{C}$ auch als reelle Funktion auffassen, wobei $u = \mathrm{Re}(f)$ und $v = \mathrm{Im}(f)$. Genauer: Ist $z = x+iy \in \mathbb{C}$, so ist

$$f(z) = u\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix} + iv\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}.$$

Als erstes stellen wir fest, dass Differenzierbarkeit in $\mathbb{C}$ und Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^2$ **nicht** dasselbe sind:

Beispiel 3.8. Nach Beispiel 3.7 ist die komplexe Konjugation $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = \overline{z}$ nicht differenzierbar. Im Reellen erhalten wir aber die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : f\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\\ -y\end{pmatrix}$$

und diese ist reell differenzierbar, da jede Komponente reell differenzierbar ist.

Andererseits, wenn eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar in $a \in D$ ist, so ist sie insbesondere reell differenzierbar in a, denn: Aus Gleichung (3) erhalten wir

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}}} \frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)h}{h} = 0.$$

Insbesondere ist also die Gleichung (4) erfüllt. D.h. f ist reell differenzierbar und weiter gilt, dass das Differential in diesem Fall $\mathbb{C}$-linear ist. Das Differential ist hier $f'(a)h$ und (als Funktion in h) ist dieses $\mathbb{C}$-linear. Hier ist der entscheidende Punkt: Wie im Beispiel der komplexen Konjugation ist diese als Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zwar $\mathbb{R}$-linear, als Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \overline{z}$ aber **nicht** $\mathbb{C}$-linear!

ENDE 2. Vorlesung

Lemma 3.9. Es sei $f : \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Dann sind äquivalent:

(i) f ist $\mathbb{C}$-linear;
(ii) Es gibt ein $w \in \mathbb{C}$ mit $f(z) = z\cdot w$ für alle $z \in \mathbb{C}$;

(iii) Es gibt eine Matrix
$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$
mit $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

In diesem Fall gilt $w = a + ib$.

Übung 3.10. Beweisen Sie Lemma 3.9. Geben Sie weiter ein Beispiel einer Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ an, die $\mathbb{R}$-linear aber nicht $\mathbb{C}$-linear ist.

Wir wollen im Folgenden den Zusammenhang zwischen reeller und komplexer Differenzierbarkeit genauer untersuchen. Wir halten schon einmal fest:

Proposition 3.11. *Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen. Für eine Abbildung $f : D \to \mathbb{C}$ sind äquivalent:*

(i) *f ist komplex differenzierbar in $a \in D$;*
(ii) *f ist reell differenzierbar in $a \in D$ und das Differential A von f an der Stelle a ist $\mathbb{C}$-linear.*

Beweis. Die Implikation $(i) \Rightarrow (ii)$ haben wir bereits oben gesehen. Für die Implikation $(ii) \Rightarrow (i)$ halten wir noch einmal fest, dass die reelle Differenzierbarkeit von f in a äquivalent dazu ist, dass

$$f(z) = f(a) + A \cdot (z - a) + r(z - a) \tag{5}$$

mit $\lim_{z\to a} \frac{r(z-a)}{\|z-a\|} = 0$. Nach Lemma 3.9 liefert die $\mathbb{C}$-Linearität des Differentials, dass es ein $w \in \mathbb{C}$ gibt, so dass $A \cdot (z - a) = w \cdot (z - a)$. Somit liefert (5), dass

$$\frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \frac{r(z - a)}{z - a} + w. \tag{6}$$

Da die Bedingung $\lim_{z\to a} \frac{r(z-a)}{\|z-a\|} = 0$ äquivalent zu $\lim_{z\to a} \frac{r(z-a)}{z-a} = 0$ ist (eine Folge in $\mathbb{R}^2$ konvergiert genau dann gegen 0, wenn die Folge ihrer Beträge gegen Null konvergiert), liefert (6), dass

$$\lim_{z\to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = w.$$

D.h. f ist komplex differenzierbar in a. □

Betrachten wir wieder eine in $a \in D$ komplex differenzierbare Funktion $f = u + iv : D \to \mathbb{C}$. Schreibe $a = b + ic$. Dann ist

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a + ih) - f(a)}{ih} \tag{7}$$

Wählen wir $h \in \mathbb{R}$, so gilt etwa

$$f(a + h) = u\begin{pmatrix} b + h \\ c \end{pmatrix} + iv\begin{pmatrix} b + h \\ c \end{pmatrix}$$

bzw.

$$f(a + ih) = u\begin{pmatrix} b \\ c + h \end{pmatrix} + iv\begin{pmatrix} b \\ c + h \end{pmatrix}.$$

Aus Gleichung (7) erhalten wir somit

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{u\begin{pmatrix} b+h \\ c \end{pmatrix} - u\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}}{h} + i \lim_{h\to 0} \frac{v\begin{pmatrix} b+h \\ c \end{pmatrix} - v\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{u\begin{pmatrix} b \\ c+h \end{pmatrix} - u\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}}{h} + i \lim_{h\to 0} \frac{v\begin{pmatrix} b \\ c+h \end{pmatrix} - v\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}}{h}. \end{aligned}$$

Für die reellen Funktionen u und v existieren also die partiellen Ableitungen an der Stelle $a = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a) := u_x(a),\ \frac{\partial u}{\partial y}(a) := u_y(a),\ \frac{\partial v}{\partial x}(a) := v_x(a),\ \frac{\partial v}{\partial y}(a) := v_y(a). \tag{8}$$

Nach Proposition 3.11 ist f reell differenzierbar in a mit $\mathbb{C}$-linearem Differential A. Aus den Grundlagen der Mathematik [GdM, Satz 18.12] wissen wir, dass das Differential A durch die Jacobi-Matrix von f in a gegeben sein muss, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} u_x(a) & u_y(a) \\ v_x(a) & v_y(a) \end{pmatrix}.$$

Die $\mathbb{C}$-Linearität liefert uns nach Lemma 3.9 nun die folgenden Gleichungen:

$$u_x(a) = v_y(a) \text{ und } u_y(a) = -v_x(a). \tag{9}$$

Diese werden Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen genannt. Wir haben somit insgesamt gezeigt:

Satz 3.12. *Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:*
- (i) *f ist komplex differenzierbar in $a \in D$;*
- (ii) *f ist reell differenzierbar in $a \in D$ und es gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen $u_x(a) = v_y(a)$ und $u_y(a) = -v_x(a)$.*

In diesem Fall gilt $f'(a) = u_x(a) + iv_x(a) = v_y(a) - iu_y(a)$.

Bemerkung 3.13. Ob eine reell differenzierbare Abbildung $f : D \to \mathbb{C}$ auch komplex differenzierbar ist, können wir also alleine an der Gestalt der Jacobi-Matrix ablesen.

Beispiel 3.14. Die Abbildung

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z = x + iy \mapsto \underbrace{\exp(x)\cos(y)}_{=u(x,y)} + i \underbrace{\exp(x)\sin(y)}_{=v(x,y)}$$

ist auf ganz $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ reell differenzierbar. Da

$$u_x = \exp(x)\cos(y) = v_y \text{ und } u_y = -\exp(x)\sin(y) = -v_x,$$

sind auch die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt. Somit ist die Funktion nach Satz 3.12 auch auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar und es gilt

$$f'(z) = u_x + iv_x = \exp(x)\cos(y) + i\exp(x)\sin(y) = f(z)$$

Definition 3.15. Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine Abbildung $f : D \to \mathbb{C}$ heißt

- holomorph in $a \in D$, wenn sie in einer offenen Umgebung von a komplex differenzierbar ist;
- holomorph auf D, wenn sie in jedem $a \in D$ komplex differenzierbar ist;
- ganz, wenn sie holomorph auf $D = \mathbb{C}$ ist.

Proposition 3.16 (Rechenregeln für komplexe Ableitungen)**.**

(a) Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f, g : D \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar in $a \in D$. Dann gilt:

(i) $\alpha f + \beta g$ ist komplex differenzierbar in a für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ mit

$$(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a).$$

(ii) $f \cdot g$ ist komplex differenzierbar in a mit

$$(fg)'(a) = (f'g + fg')(a).$$

(iii) Ist $g(a) \neq 0$, so ist $\frac{f}{g}$ komplex differenzierbar in a mit

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'g - fg'}{g^2}(a).$$

(b) Seien $D, D' \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$, $g : D' \to \mathbb{C}$ komplexe Funktionen mit $f(D) \subseteq D'$. Ist f komplex differenzierbar in $a \in D$ und g komplex differenzierbar in $f(a)$, so ist auch $g \circ f$ komplex differenzierbar in a mit

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

3.3. **Die Wirtinger-Ableitungen.** Wir haben nun Kriterien an der Hand um zu entscheiden, wann eine komplexe Funktion $f(z)$ (mit $z = x + iy$) komplex differenzierbar ist. Der Nachteil unserer bisherigen Kriterien (Proposition 3.11 und Satz 3.12) ist aber, dass die komplexe Funktion $f(z)$ in der Regel in Abhängigkeit von z und $\overline{z}$ gegeben ist. Wir können nicht erwarten, dass die Funktion in Abhängigkeit von x und y gegeben ist oder gar in Real- und Imaginärteil unterteit ist.

Außerdem können wir aufgrund von Beispiel 3.7 davon ausgehen, dass das Auftauchen von $\overline{z}$ in unserer Funktion $f(z)$ im Allgemeinen dazu führen wird, dass diese **nicht** komplex differenzierbar ist.

Die Idee ist daher, unsere Funktion $f(z)$ -falls sie das nicht sowieso bereits ist- ganz bewusst in Abhängigkeit von z und $\overline{z}$ auszudrücken und ein Kriterium zu finden, welches uns erlaubt mit z und $\overline{z}$ derart zu rechnen, als ob diese "unabhängige" Variablen sind (was sie offenbar nicht sind).

Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ eine Abbildung. Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ schreiben wir wieder $f(z) = u\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + iv\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, wobei u und v der Real- und Imaginärteil von f sind. Wir definieren zunächst

$$\frac{\partial f}{\partial x} := u_x + iv_x \text{ und } \frac{\partial f}{\partial y} := u_y + iv_y. \tag{10}$$

Motiviert durch die Relationen (siehe Lemma 2.3 (4))

$$x = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) \text{ und } y = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}) = \frac{1}{2}(i\overline{z} - iz)$$

definieren wir weiter

$$\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \text{ und } \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right), \tag{11}$$

genannt Wirtinger-Ableitungen. Der Sinn dieser Definitionen mündet nun in folgendem Kriterium, welches uns im Sinne obiger Definitionen liefert, dass eine komplex differenzierbare Funktion nur von z, aber nicht von $\overline{z}$ abhängt.

Satz 3.17. *Es seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ eine in $a \in D$ reell differenzierbare Abbildung. Dann sind äquivalent:*

(i) *f ist komplex differenzierbar in a;*
(ii) *$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(a) = 0$.*

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
f \text{ komplex differenzierbar in } a \quad &\overset{\text{Satz 3.12}}{\Leftrightarrow} \quad u_x(a) = v_y(a),\ u_y(a) = -v_x(a) \\
&\Leftrightarrow \quad u_x(a) + iv_x(a) = v_y(a) - iu_y(a) \\
&\Leftrightarrow \quad u_x(a) + iv_x(a) = -i(u_y(a) + iv_y(a)) \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(a) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(a) \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\overline{z}}(a) = 0.
\end{aligned}$$

□

Dass wir mit den Wirtinger-Ableitungen derart rechnen können wie wir uns dies wünschen, d.h. dass z und $\overline{z}$ sich wie unabhängige Variablen verhalten, liefert die folgende

Proposition 3.18. *Es seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f, g : D \to \mathbb{C}$ in $a \in D$ reell differenzierbare Abbildungen.*

(a) *Ist f komplex differenzierbar in $a \in D$, so gilt $f'(a) = \frac{\partial f}{\partial z}(a)$.*
(b) *$\frac{\partial z}{\partial z} = 1 = \frac{\partial \overline{z}}{\partial \overline{z}}$ und $\frac{\partial z}{\partial \overline{z}} = 0 = \frac{\partial \overline{z}}{\partial z}$.*
(c) Summenregel:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z}(\alpha f + \beta g) &= \alpha\frac{\partial f}{\partial z} + \beta\frac{\partial g}{\partial z}, \\
\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(\alpha f + \beta g) &= \alpha\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} + \beta\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}
\end{aligned}$$

für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

(d) Produktregel:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(f \cdot g)}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial z} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial z}, \\
\frac{\partial(f \cdot g)}{\partial \overline{z}} &= \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial \overline{z}}.
\end{aligned}$$

(e) Quotientenregel:

$$\frac{\partial\left(\frac{f}{g}\right)}{\partial z} = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}\cdot g - f\cdot\frac{\partial g}{\partial z}}{g^2},$$
$$\frac{\partial\left(\frac{f}{g}\right)}{\partial \overline{z}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\cdot g - f\cdot\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}}{g^2}.$$

Beispiel 3.19. Die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = |z|^2 = z \cdot \overline{z}$ ist sicher reell differenzierbar, aber wegen $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = z$ ist diese Funktion nach Satz 3.17 nur in $z = 0$ komplex differenzierbar.

Beweis von Proposition 3.18. (a) Betrachte wieder die Zerlegung in Real- und Imaginärteil $f = u + iv$. Da f in a komplex differenzierbar ist, gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

(12) $$u_x(a) = v_y(a) \text{ und } u_y(a) = -v_x(a).$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial z}(a) &\overset{(11)}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a) - i\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right)\\
&\overset{(10)}{=} \frac{1}{2}(u_x(a) + iv_x(a) - iu_y(a) + v_y(a))\\
&\overset{(12)}{=} \frac{1}{2}(2u_x(a) + 2iv_x(a))\\
&= u_x(a) + iv_x(a) \overset{\text{Satz 3.12}}{=} f'(a).
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial z} &\overset{(11)}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial x} - i\frac{\partial z}{\partial y}\right)\\
&\overset{(10)}{=} \frac{1}{2}(1 + i\cdot 0 - i\cdot(0 + i\cdot 1)) = \frac{1}{2}(1 - i^2) = 1.
\end{aligned}$$

Analog erhalten wir die anderen Aussagen durch einsetzen.
(c)-(e) Übung. □

Übung 3.20. Beweisen Sie die Produkt-Regel für die Wirtinger Ableitungen.

ENDE 3. VORLESUNG

4. Komplexe Integralrechnung

4.1. **Wegintegrale.** Anstatt über Intervalle (wie in $\mathbb{R}$), werden wir in $\mathbb{C}$ über Wege integrieren.

Definition 4.1. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $D \subseteq \mathbb{C}$. Ein Weg in D ist eine stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \to D$.

- Der Weg γ heißt geschlossen, wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$ gilt.
- Der Weg γ heißt stückweise stetig differenzierbar, wenn γ stetig ist und wenn es

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$$

mit $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\gamma_{|[t_{i-1},t_i]}$ stetig differenzierbar ist für $1 \leq i \leq n$. (Man beachte, dass $\gamma'_{|(t_{i-1},t_i)}$ dann stetig ist, aber nicht zwingend auf den t_i definiert ist. Wir können aber stetig fortsetzen.)

Wir nennen $\gamma(a)$ den Anfangs- und $\gamma(b)$ den Endpunkt des Weges γ.

Beispiel 4.2.

(a) Die Abbildung

$$\gamma, [-2, 2] \to \mathbb{C}, t \mapsto \begin{cases} -1 + i(2 + t) & \text{wenn } t \in [-2, -1] \\ i + t & \text{wenn } t \in [-1, 1] \\ 1 + i(2 - t) & \text{wenn } t \in [1, 2] \end{cases}$$

definiert einen stückweise stetig differenzierbaren Weg.

(b) Für $c \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$ definiert die Abbildung

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto c + r \cdot \exp(it)$$

einen geschlossenen, stückweise stetig differenzierbaren Weg. Visualisiert können wir uns diesen als die Kreislinie mit Radius r um den Mittelpunkt c vorstellen. Dieser Weg wird gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen (positive Orientierung).

Da Wege, die nicht stückweise stetig differenzierbar sind, in der folgenden Theorie zu einigen Unannehmlichkeiten führen würden und für unsere Anwendungen auch eher uninteressant sind, **betrachten wir im Folgenden nur Wege, die stückweise stetig differenzierbar sind**.

Definition 4.3. Die Bogenlänge (oder einfach **Länge**) eines Weges $\gamma : [a, b] \to D$ definieren wir als

$$L(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)| \, \mathrm{d}t.$$

(Da γ' auf $[a, b] \setminus \{t_1, \ldots, t_{n-1}\}$ stetig ist, ist dies wohldefiniert, siehe auch [GdM, Kapitel 8].)

In diesem Sinne natürlicher wäre es sicher, die Bogenlänge durch

$$L(\gamma) = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\gamma'(t)| \, \mathrm{d}t$$

zu defineren. Beide Definitionen führen aber auf den selben Begriff (siehe auch [Koe, Kapitel 12.2])

Bemerkung 4.4. Mit $z = \gamma(t)$ erhalten wir die folgende (formal nicht ganz korrekte) Gleichung

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| \ \mathrm{d}t = \int_a^b \left|\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right| \ \mathrm{d}t = \int_a^b |\mathrm{d}z|.$$

Mit der Anschauung von $|\mathrm{dz}|$ als Länge eines unendlich kleinen Geradenstücks, erhalten wir, dass $L(\gamma)$ mit unserer intuitiven Vorstellung der Länge übereinstimmt. Dies veranschaulicht auch folgendes...

Beispiel 4.5. Betrachte den Weg γ aus Beispiel 4.2 (b):

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^{2\pi} |\gamma'(t)| \ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} |ir\exp(it)| \ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} |ir(\cos(t) + i\sin(t))| \ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} |ir\cos(t) - r\sin(t)| \ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2\cos^2(t) + r^2\sin^2(t)} \ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} r \ \mathrm{d}t = 2\pi r \end{aligned}$$

Definition 4.6. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ stetig. Eine holomorphe Funktion $F : D \to \mathbb{C}$ mit $F'(z) = f(z)$ für alle $z \in D$ heißt Stammfunktion von f auf D.

(Auch im Komplexen werden wir Stammfunktionen wieder durch Integrieren erhalten.)

Definition 4.7. Sei $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$.

(a) Eine Funktion $f : I \to \mathbb{C}$ heißt integrierbar auf I, falls $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ auf I integrierbar sind. Setze

$$\int_a^b f(t) \ \mathrm{d}t := \int_a^b \operatorname{Re} f(t) \ \mathrm{d}t + i \int_a^b \operatorname{Im} f(t) \ \mathrm{d}t.$$

(b) Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $\gamma : I \to D$ ein Weg und $f : D \to \mathbb{C}$ eine auf $\gamma(I)$ stetige Funktion. Das Wegintegral von f entlang γ ist definiert als

$$\int_\gamma f(z) \ \mathrm{dz} := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) \ \mathrm{dt},$$

wobei wir das Integral auf der rechten Seite im Sinne von Teil (a) zu verstehen haben.

Bemerkung 4.8. Mit $z = \gamma(t)$ erhalten wir die folgende (wieder formal nicht ganz korrekte) Gleichung

$$L(\gamma) = \int f(z) \ \mathrm{d}z = \int f(z)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \ \mathrm{d}t = \int f(\gamma(t))\gamma'(t) \ \mathrm{d}t.$$

Beispiel 4.9. Sei γ wieder unser Weg aus Beispiel 4.2 (b) und betrachte die komplexe Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{c\} \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{z-c}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\ \mathrm{dz} &= \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\gamma'(t)\ \mathrm{dt} \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{r\exp(it)} ir\exp(it)\ \mathrm{dt} \\ &= \int_0^{2\pi} i\ \mathrm{dt} = i\int_0^{2\pi}\ \mathrm{dt} = i2\pi.\end{aligned}$$

Bemerkung 4.10. Wegintegrale haben leider keine anschauliche Bedeutung als Fläche oder Volumen. Ist aber $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$ ein reeller Weg und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, so folgt aus der Substitutionsregel für reelle Integrale (mit $s = \gamma(t)$):

$$\int_\gamma f(z)\ \mathrm{dz} = \int_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} f(s)\ \mathrm{ds}.$$

Betrachten wir noch einmal Beispiel 4.2 (b). Auch der Weg

$$\delta : [0,1] \to \mathbb{C}, t \mapsto c + r\exp(2\pi it)$$

beschreibt eine Kreislinie um c mit Länge $2\pi r$. Daher wollen wir uns im Folgenden vergewissern, dass das Wegintegral unabhängig von der gewählten Parametrisierung des Weges ist.

Definition 4.11. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$, $\gamma : [a,b] \to D$ ein Weg und $\psi : [c,d] \to [a,b]$ stetig differenzierbar mit $\psi(c) = a$ und $\psi(d) = b$. Setze

$$\psi^*(\gamma) := \gamma \circ \psi : [c,d] \to D.$$

Die Abbildung ψ heißt Umparametrisierung von γ. Eine Umparametrisierung ψ heißt nicht-negativ, wenn ψ monoton wachsend ist.

Bemerkung 4.12. Die Wege γ und $\psi^*(\gamma)$ stellen die selben Bildkurven dar (d.h. $\gamma([a,b]) = \psi^*(\gamma)([c,d])$), lediglich die "Durchlaufgeschwindigkeit" ist unterschiedlich.

Bemerkung 4.13. Mit obiger Notation:

(a) Ist ψ nicht-negativ, so ist $L(\psi^*(\gamma)) = L(\gamma)$.
(b) Ist $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ stetig auf $\gamma([a,b])$, so gilt

$$\int_{\psi^*(\gamma)} f(z)\ \mathrm{dz} = \int_\gamma f(z)\ \mathrm{dz}$$

Beweis. Zu (a):

$$\begin{aligned}L(\psi^*(\gamma)) &= \int_c^d |(\gamma\circ\psi)'(t)|\ \mathrm{dt} = \int_c^d |\gamma'(\psi((t))\psi'(t)|\ \mathrm{dt} \\ &\overset{(\psi'\geq 0)}{=} \int_c^d |\gamma'(\psi((t))|\psi'(t)\ \mathrm{dt} \overset{(s:=\psi(t))}{=} \int_{\psi(c)=a}^{\psi(d)=b} |\gamma'(s)|\ \mathrm{ds} = L(\gamma)\end{aligned}$$

Zu (b):

$$\begin{aligned}\int_{\psi^*(\gamma)} f(z)\ \mathrm{dz} &= \int_c^d f(\gamma(\psi(t)))(\gamma\circ\psi)'(t)\ \mathrm{dt} = \int_c^d f(\gamma(\psi(t)))(\gamma'(\psi(t))\psi'(t)\ \mathrm{dt} \\ &\overset{(s:=\psi(t))}{=} \int_{\psi(c)=a}^{\psi(d)=b} f(\gamma(s))\gamma'(s)\ \mathrm{ds} = \int_\gamma f(z)\ \mathrm{dz}\end{aligned}$$

□

Die Orientierung spielt also im Gegensatz zur Parametrisierung eine entscheidene Rolle. Kehren wir die Orientierung um, d.h. gilt $\psi(c) = b$ und $\psi(d) = a$, so gilt

$$\int_{\psi^*(\gamma)} f(z)\ \mathrm{dz} = -\int_\gamma f(z)\ \mathrm{dz}.$$

Dies führt uns zu der Frage ob Wegintegrale vielleicht nur von Anfangs- und Endpunkt abhängen? Dies ist jedoch im Allgemeinen nicht der Fall, wie folgendes Beispiel zeigt:

Beispiel 4.14. Betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{z}$$

aus Beispiel 4.9 (mit $c = 0$). Für den Weg

$$\delta : [a, b] \to \mathbb{C}, t \mapsto 1$$

gilt

$$\int_\delta f(z)\ \mathrm{dz} = 0,$$

denn $\delta'(t) = 0$. Längs des Weges

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto \exp(it)$$

gilt

$$\int_\gamma f(z)\ \mathrm{dz} = i2\pi$$

nach Beispiel 4.9 (mit $c = 0, r = 1$). Es gilt aber, dass $\gamma(0) = 1 = \delta(a)$ und $\gamma(2\pi) = 1 = \delta(b)$, d.h. beide Wege haben dieselben Anfangs- und Endpunkte.

Im Allgemeinen hängen Wegintegrale also nicht nur von Anfangs- und Endpunkt ab. Bei Wegintegralen von Funktionen, die eine Stammfunktion besitzen, verhält sich dies anders:

Proposition 4.15. *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $\gamma : [a, b] \to D$ ein Weg und $f : D \to \mathbb{C}$ stetig. Hat f eine Stammfunktion F auf D, so gilt*

$$\int_\gamma f(z)\ dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Insbesondere gilt, wenn γ geschlossen ist, dass $\int_\gamma f(z)\ dz = 0$.

Beweis.

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\ \mathrm{dz} &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\ \mathrm{dt}\\ &= \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)\ \mathrm{dt}\\ &= \int_a^b (F\circ\gamma)'(t)\ \mathrm{dt}\\ &= (F\circ\gamma)(t)|_a^b\\ &= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).\end{aligned}$$

□

Beispiel 4.16. Sei

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto r\exp(it)$$

mit $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^n\ (n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}).$$

Dann ist $f'(z) = nz^{n-1}$ (siehe Beispiel 3.7 (a)). Für $n \neq -1$ ist also

$$F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{n+1} z^{n+1}$$

eine Stammfunktion von f und es gilt

$$\int_\gamma f(z)\ \mathrm{dz} \overset{(4.15)}{=} F(\gamma(0)) - F(\gamma(2\pi)) = 0.$$

Im Fall $n = -1$ gilt (siehe Beispiel 4.14):

$$\int_\gamma f(z)\ \mathrm{dz} = i2\pi$$

Bemerkung 4.17. Proposition 4.15 und Beispiel 4.14 liefern uns einen fundamentalen Unterschied zur reellen Analysis. Die Funktion $f : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{z}$ ist zwar holomorph, besitzt aber keine Stammfunktion.

Würde es eine Stammfunktion F geben, so wäre (mit der Notation von Bsp. 4.14):

$$i2\pi = \int_\gamma f(z)\ \mathrm{dz} = F(\gamma(2\pi)) - F(\gamma(0)) = F(\delta(b)) - F(\delta(a)) = \int_\delta f(z)\ \mathrm{dz} = 0.$$

Die Existenz einer Stammfunktion ist im Komplexen also eine stärkere Bedingung als im Reellen (wo etwa jede stetige Funktion eine Stammfunktion besitzt).

Trotzdem wollen wir erreichen, dass unter bestimmten Voraussetzungen auch die Umkehrung von Proposition 4.15 gilt. Dazu definieren wir zunächst:

Definition 4.18. Eine Teilmenge $D \subseteq \mathbb{C}$ heißt wegzusammenhänghend, wenn es für $z_1, z_2 \in D$ einen Weg $\gamma : [a, b] \to D$ gibt mit $\gamma(a) = z_1$ und $\gamma(b) = z_2$. Ist $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und wegzusammenhängend, so nennen wir D ein Gebiet.

Wie im Reellen sind Stammfunktionen auf Gebieten eindeutig bis auf einen konstanten Term.

Lemma 4.19. Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : D \to \mathbb{C}$ stetig und $F_1, F_2 : D \to \mathbb{C}$ Stammfunktionen von f auf D. Dann ist $F_1 - F_2$ konstant.

Beweis. Sei $F := F_1 - F_2$. Dann ist F eine Stammfunktion von F' auf D und

$$F' = F_1' - F_2' = f - f = 0.$$

Somit gilt für jeden Weg $\gamma : [a, b] \to D$, dass

$$0 = \int_\gamma F'(z) \text{ dz} \overset{(4.15)}{=} F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)). \tag{13}$$

Seien $z_1, z_2 \in D$ beliebig. Da D als Gebiet wegzusammenhängend ist, können wir unseren Weg γ derart wählen, dass $\gamma(a) = z_1$ und $\gamma(b) = z_2$. Aus (13) folgt

$$F(z_1) = F(\gamma(a)) = F(\gamma(b)) = F(z_2),$$

d.h. $F = F_1 - F_2$ ist konstant auf D. □

Definition 4.20. Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein Weg. Der Umkehrweg von γ ist der Weg

$$\gamma^{-1} : [a, b] \to \mathbb{C},\ t \mapsto \gamma(a + b - t).$$

Definition 4.21. Seien $\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{C}$ und $\gamma_2 : [c, d] \to \mathbb{C}$ Wege mit $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$. Der zusammengesetzte Weg $\gamma_1 + \gamma_2$ ist definiert durch

$$\gamma_1 + \gamma_2 : [a, b + (d - c)] \to \mathbb{C},\ t \mapsto \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{wenn } t \in [a, b] \\ \gamma_2(t + c - b) & \text{wenn } t \in [b, b + d - c] \end{cases}$$

ENDE 4. VORLESUNG

Lemma 4.22. Sei $\gamma : [a, b] \to D$ ein Weg und $f : D \to \mathbb{C}$ stetig auf $\gamma([a, b])$. Dann gilt

$$\int_{\gamma^{-1}} f(z) \text{ dz} = -\int_\gamma f(z) \text{ dz}$$

Beweis. Nach Definition gilt $\gamma^{-1}(t) = \gamma(a + b - t)$, d.h. nach Kettenregel gilt $(\gamma^{-1})'(t) = -\gamma'(a + b - t)$. Mit der Substitution $s := a + b - t$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\gamma^{-1}} f(z) \text{ dz} &= \int_a^b f(\gamma^{-1}(t))(\gamma^{-1})'(t) \text{ dt} \\ &= -\int_a^b f(\gamma(a + b - t))\gamma'(a + b - t) \text{ dt} \\ &= -\int_{s(a)=b}^{s(b)=a} f(\gamma(s))\gamma'(s) \text{ ds} \\ &= -\int_\gamma f(z) \text{ dz}. \end{aligned}$$

□

Übung 4.23. (Blatt 2, Aufgabe 4) Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $\gamma_1 : [a,b] \to D$ und $\gamma_2 : [c,d] \to D$ Wege mit $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$. Dann gilt:

(a) $L(\gamma_1) = L(\gamma_1^{-1})$;
(b) $L(\gamma_1 + \gamma_2) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2)$;
(c) Ist $f : D \to \mathbb{C}$ auf $\gamma_1([a,b])$ und $\gamma_2([c,d])$ stetig, so gilt

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)\ \mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\ \mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\ \mathrm{d}z.$$

Wir kommen nun zu unserer teilweisen Umkehrung von Proposition 4.15.

Satz 4.24. *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ stetig. Gilt $\int_\gamma f(z)\ dz = 0$ für jeden geschlossenen Weg in D, so besitzt f eine Stammfunktion auf D.*

Beweis. Sei $a \in D$ fest. Da D wegzusammenhängend ist, gibt es zu jedem $z \in D$ einen Weg γ_z in D von a nach z. Wir definieren

$$F : D \to \mathbb{C},\ z \mapsto \int_{\gamma_z} f(w)\ \mathrm{d}w.$$

Wir haben zu zeigen, dass F wohldefiniert und eine Stammfunktion von f ist.

1. F ist wohldefiniert: Sei dazu $\widetilde{\gamma_z}$ ein weiterer Weg in D von a nach z. Dann ist $\gamma_z + (\widetilde{\gamma_z})^{-1}$ ein geschlossener Weg mit Anfangs- und Endpunkt a. Es ist

$$\begin{aligned} 0 &\overset{\text{(Vor.)}}{=} \int_{\gamma_z+(\widetilde{\gamma_z})^{-1}} f(w)\ \mathrm{d}w \overset{(4.23)}{=} \int_{\gamma_z} f(w)\ \mathrm{d}w + \int_{(\widetilde{\gamma_z})^{-1}} f(w)\ \mathrm{d}w \\ &\overset{(4.22)}{=} \int_{\gamma_z} f(w)\ \mathrm{d}w - \int_{\widetilde{\gamma_z}} f(w)\ \mathrm{d}w. \end{aligned}$$

2. F ist Stammfunktion von f auf D, d.h. $F'(z_0) = f(z_0)$ für alle $z_0 \in D$: Da D offen ist, gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(z_0) \subseteq D$. Wähle $z \in B_\epsilon(z_0)$ und betrachte den geraden Weg

$$\alpha : [0,1] \to D,\ t \mapsto z_0 + t(z - z_0).$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} F(z) - F(z_0) &\overset{\text{(Def. von } F)}{=} \int_{\gamma_z} f(w)\ \mathrm{d}w - \int_{\gamma_{z_0}} f(w)\ \mathrm{d}w \\ &\overset{\text{(s.o.)}}{=} \int_{(\gamma_{z_0})^{-1}+\gamma_z} f(w)\ \mathrm{d}w \\ &\overset{\text{(Vor.)}}{=} \int_\alpha f(w)\ \mathrm{d}w. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir benutzt, dass wir $(\gamma_{z_0})^{-1}$, γ_z und α zu einem geschlossenen Weg mit Anfangs- und Endpunkt z_0 zusammensetzen können. Über diesem geschlossenen Weg ist das Wegintegral nach Voraussetzung 0. Mit 4.22 und 4.23 folgt dann die letzte Gleichung. Es folgt

$$F'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{z - z_0} \int_\alpha f(w)\ \mathrm{d}w.$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}\lim_{z\to z_0}\frac{1}{z-z_0}\int_\alpha f(w)\ \mathrm{d}w &= \lim_{z\to z_0}\frac{1}{z-z_0}\int_0^1 f(\alpha(t))\alpha'(t)\ \mathrm{d}t\\ &= \lim_{z\to z_0}\frac{1}{z-z_0}\int_0^1 f(z_0+t(z-z_0))(z-z_0)\ \mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 \lim_{z\to z_0} f(z_0+t(z-z_0))\ \mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 f(z_0)\ \mathrm{dt} = f(z_0)\int_0^1\ \mathrm{d}t = f(z_0).\end{aligned}$$

(Wir dürfen Grenzwert und Integral vertauschen, da der Integrand als Funktion in z und t stetig ist, siehe auch [GdM].) □

Was wir bisher über komplexe Integration wissen: Ist $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ stetig, so gilt:

- Das Wegintegral $\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z$ hängt **nicht** von der Parametrisierung des Weges ab ($\to$ Bemerkung 4.13).
- Das Wegintegral $\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z$ ist in der Regel **nicht** eindeutig durch Anfangs- und Endpunkt des Weges bestimmt ($\to$ Beispiel 4.14).
- Hat f hingegen eine Stammfunktion, so hängt $\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z$ nur von Anfangs- und Endpunkt des Weges ab ($\to$ Proposition 4.15).
- Auf einem Gebiet besitzt f eine Stammfunktion, wenn alle Wegintegrale entlang geschlossener Wege auf diesem Gebiet verschwinden ($\to$ Satz 4.24).

4.2. **Der Cauchysche Integralsatz.** Wir haben im vorherigen Kapitel gesehen, dass im Falle der Existenz einer Stammfunktion das Wegintegral nur von Anfangs- und Endpunkt des Weges abhängt. Ebenso haben wir ein Kriterium für die Existenz der Stammfunktion kennengelernt. Dieses ist aber sicher nicht allzu leicht nachprüfbar.

Wir wollen daher nun ein leicht nachprüfbares hinreichendes Kriterium für die Wegunabhängigkeit des Integrals kennenlernen. Und zwar ohne eine Stammfunktion suchen zu müssen.

Satz 4.25 (Cauchyscher Integralsatz)**.** *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph auf D, $Q = [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Quader, $\psi : Q \to D$ stetig differenzierbar und $\psi(\partial Q)$ das Bild des Randes von Q unter ψ. Dann gilt:*

$$\int_{\psi(\partial Q)} f(z)\ dz = 0.$$

Wir fassen ∂Q hierbei als geschlossenen Weg mit positiver Orientirerung (d.h. gegen den Uhrzeigersinn) auf. Siehe dazu Abbildung 4.

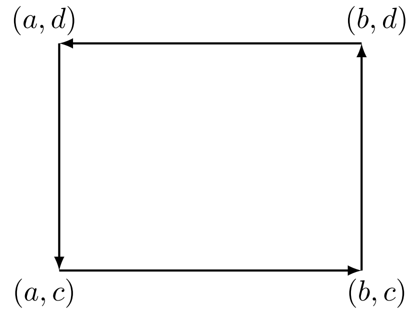


ABBILDUNG 4. Quader $Q = [a,b] \times [c,d]$.

Ein mögliche Parametrisierung dieses Weges ist etwa wie folgt gegeben:

$$\partial Q : [0,4] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{cases} (a + t(b-a), c) & \text{wenn } t \in [0,1] \\ (b, c + (t-1)(d-c)) & \text{wenn } t \in [1,2] \\ (a + (3-t)(b-a), d) & \text{wenn } t \in [2,3] \\ (a, c + (4-t)(d-c)) & \text{wenn } t \in [3,4] \end{cases}$$

Unter der Identifikation $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}, (x,y) \mapsto x + iy$ können sie ∂Q dann auch als Weg in $\mathbb{C}$ (anstatt in $\mathbb{R}^2$) auffassen.

Bemerkung 4.26. In der Literatur wird der Cauchysche Integralsatz auch allgemeiner für Dreiecke, Sterngebiete, konvexe Gebiete usw. formuliert. Unsere Formulierung für einen Quader wird uns den Beweis vereinfachen und wir werden später darauf zurückkommen, dass diese zunächst sehr restriktive Annahme an unseren Weg für die meisten Fälle vollkommen ausreichend ist.

Für den Beweis des Cauchyschen Integralsatzes benötigen wir zunächst einige Vorbereitung:

Lemma 4.27 (Dreiecksungleichung der Integralrechnung)**.** Seien $a \leq b$ reelle Zahlen und $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig. Dann gilt

$$\Big| \int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t \Big| \leq \int_a^b |f(t)| \, \mathrm{d}t.$$

Beweis. Siehe Blatt 3, Aufgabe 3(a). □

Lemma 4.28. Seien $Q = [a,b] \times [c,d] \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Quader und $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar. Dann existiert ein $M \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$L(\psi(\partial Q)) \leq M \cdot L(\partial Q).$$

Beweis. Sei $\rho : [a,b] \to \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ der gerade Weg von (a,c) nach (b,c). Diesen können wir etwa durch $\rho(t) = (t,c)$ parametrisieren. Da $||\rho'(t)|| = ||(1,0)|| = 1$ für alle $t \in [a,b]$ gilt, folgt

$$L(\psi \circ \rho) = \int_a^b |(\psi \circ \rho)'(t)| \, \mathrm{d}t = \int_a^b | \, \psi'(\underbrace{\rho(t)}_{\in Q}) \cdot \underbrace{\rho'(t)}_{\in \partial \overline{B_0(1)}} \, | \, \mathrm{d}t \tag{14}$$

Setze $M := \max\{|\psi'(z)w| \mid z \in Q, \ w \in \partial \overline{B_0(1)}\}$, wobei $\psi'(z) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine Matrix und $\psi'(z)w \in \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ ein Matrix-Vektor Produkt ist.

Die Funktion $|\psi'(z)w|$ ist stetig auf der kompakten Menge $Q \times \partial\overline{B_0(1)}$, daher existiert M. Aus (14) folgt

$$L(\psi \circ \rho) \leq M \int_a^b \mathrm{d}t = M(b-a) = M \cdot L(\rho).$$

Analog können wir für die drei anderen Kanten von Q argumentieren. Die Behauptung folgt dann aus Übung 4.23. □

Folgerung 4.29. *Die Ungleichung aus Lemma 4.28 gilt auch für jeden Teilquader von Q.*

Beweis. Dies folgt direkt aus der Definition von M im Beweis von Lemma 4.28, da wir hier das Maximum über alle Punkte in Q betrachten. □

Lemma 4.30. Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ stetig und $\gamma : [a,b] \to D$ ein Weg in D. Dann gilt

$$\Big| \int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z \Big| \leq L(\gamma) \cdot \max_{z \in \gamma([a,b])} |f(z)|.$$

(Das Maximum auf der rechten Seite existiert, da $|f \circ \gamma|$ auf $[a,b]$ stetig ist.)

Beweis.

$$\begin{aligned}
\Big| \int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z \Big| &\overset{\text{(Def.)}}{=} \Big| \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\ \mathrm{d}t \Big| \\
&\overset{(4.27)}{\leq} \int_a^b |f(\gamma(t))\gamma'(t)|\ \mathrm{d}t \\
&\leq \max_{z \in \gamma([a,b])} |f(z)| \int_a^b |\gamma'(t)|\ \mathrm{d}t \\
&= \max_{z \in \gamma([a,b])} |f(z)| \cdot L(\gamma)
\end{aligned}$$

□

Bevor wir zum Beweis des Cauchyschen Integralsatzes kommen, wollen wir uns noch ein Beispiel angucken:

Beispiel 4.31. Für $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$ betrachte die stetig differenzierbare Abbildung

$$\psi : Q = [0,r] \times [0,2\pi] \to \mathbb{C},\ (t,s) \mapsto z_0 + t \cdot \exp(is).$$

Dann ist $\psi(\partial Q)$ die Kreislinie (mit positiver Orientierung) um z_0 mit Radius r. D.h. nach dem Cauchyschen Integralsatz erhalten wir $\int_{\psi(\partial Q)} f(z)\ \mathrm{d}z = 0$, wenn f auf dem Kreis $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\}$ holomorph ist.

Betrachte dazu die holomorphe Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{1}{z}$$

und die Wege γ_1 und γ_2 aus Abbildung 5.

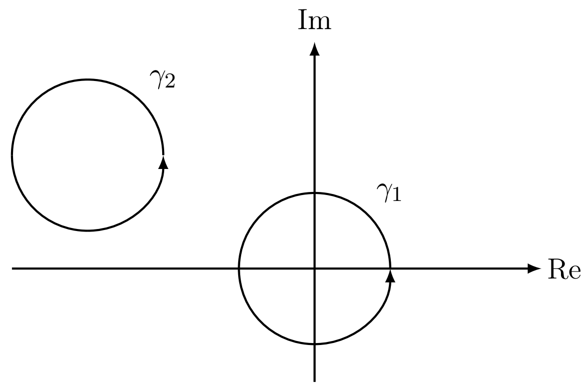


Abbildung 5. Wege auf Kreislinien.

Nach dem Cauchyschen Integralsatz ist

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = 0,$$

da f auf der von γ_2 eingeschlossenen Kreisfläche holomorph ist. Auf den Weg γ_1 können wir den Cauchyschen Integralsatz jedoch nicht anwenden, da die eingeschlossenen Fläche den Nullpunkt enthält und in diesem ist f nicht komplex differenzierbar. Aus Beispiel 4.9 wissen wir auch bereits, dass

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = i2\pi.$$

ENDE 5. VORLESUNG

Jetzt kommen wir zum Beweis des Cauchyschen Integralsatzes:

Beweis von Satz 4.25. Wir unterteilen dazu Q in vier gleichmäßige Quader wie in Abbildung 6 angegeben.

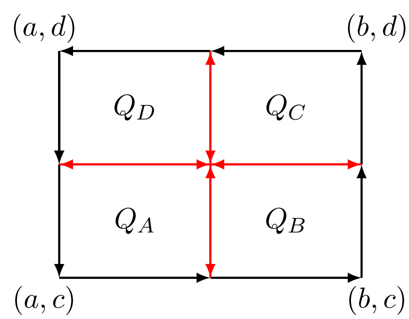


Abbildung 6. Unterteilung des Quaders $Q = [a, b] \times [c, d]$.

Wir erhalten mit Übung 4.23, dass

$$\int_{\psi(\partial Q)} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\psi(\partial Q_A)} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\psi(\partial Q_B)} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\psi(\partial Q_C)} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\psi(\partial Q_D)} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Man beachte, dass sich auf der rechten Seite dieser Gleichung die Wegintegrale über die in Abbildung 6 rot gekennzeichneten Wegabschnitte wegheben. Dies folgt aus Lemma 4.22, da wir diese Wegabschnitte in beiden Richtungen durchlaufen.

Wir wählen $Q_1 \in \{Q_A, Q_B, Q_C, Q_D\}$ derart, dass $|\int_{\psi(\partial Q_1)} f(z)\ \mathrm{d}z|$ maximal ist.

$$\Rightarrow \ \Big|\int_{\psi(\partial Q)} f(z)\ \mathrm{d}z\Big| \leq 4 \cdot \Big|\int_{\psi(\partial Q_1)} f(z)\ \mathrm{d}z\Big|.$$

Induktiv erhalten wir dann eine absteigende Kette von Quadern $Q \supseteq Q_1 \supseteq Q_2 \supseteq \cdots$ mit

$$\Big|\int_{\psi(\partial Q)} f(z)\ \mathrm{d}z\Big| \leq 4^n \cdot \Big|\int_{\psi(\partial Q_n)} f(z)\ \mathrm{d}z\Big| \text{ für alle } n \geq 1. \tag{15}$$

Der Schnitt $\cap_{n\in\mathbb{N}}\ Q_n$ ist einelementig und wir setzen $z_0 := \psi(\cap_{n\in\mathbb{N}}\ Q_n) \in \psi(Q)$. Da f insbesondere in z_0 komplex differenzierbar ist, können wir f (durch lineare Approximation in z_0) schreiben als

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + r(z) \quad \text{mit } \lim_{z\to z_0} \frac{r(z)}{|z - z_0|} = 0. \tag{16}$$

Die stetige Funktion $g(z) := f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)$ hat die Stammfunktion $z\cdot f(z_0)+\frac{1}{2}f'(z_0)(z-z_0)^2$. Nach Proposition 4.15 gilt daher

$$\int_\delta g(z)\ \mathrm{d}z = 0 \quad \text{für jeden geschlossenen Weg } \delta \text{ in } D. \tag{17}$$

Weiter halten wir schon einmal fest, dass

$$|z - z_0| \leq L(\psi(\partial Q_n)) \quad \text{für } z \in \psi(Q_n). \tag{18}$$

Insgesamt erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{\psi(\partial Q)} f(z)\ \mathrm{d}z\right| &\overset{(15)}{\leq} 4^n \cdot \left|\int_{\psi(\partial Q_n)} f(z)\ \mathrm{d}z\right| \\
&\overset{(16)}{=} 4^n \cdot \left|\int_{\psi(\partial Q_n)} g(z) + r(z)\ \mathrm{d}z\right| \\
&\overset{(17)}{=} 4^n \cdot \left|\int_{\psi(\partial Q_n)} r(z)\ \mathrm{d}z\right| \\
&\overset{(4.30)}{\leq} 4^n \cdot L(\psi(\partial Q_n)) \cdot \max_{z\in\psi(\partial Q_n)} |r(z)| \\
&\leq 4^n \cdot L(\psi(\partial Q_n)) \cdot \max_{z\in\psi(\partial Q_n)} |z-z_0| \cdot \max_{z\in\psi(\partial Q_n)} \left|\frac{r(z)}{|z-z_0|}\right| \\
&\overset{(18)}{\leq} 4^n \cdot L(\psi(\partial Q_n))^2 \cdot \max_{z\in\psi(\partial Q_n)} \left|\frac{r(z)}{|z-z_0|}\right| \\
&\overset{(4.28)}{\leq} 4^n \cdot M^2 \cdot L(\partial Q_n)^2 \cdot \max_{z\in\psi(\partial Q_n)} \left|\frac{r(z)}{|z-z_0|}\right| \\
&= 4^n \cdot M^2 \cdot \left(\frac{1}{2^n} L(\partial Q)\right)^2 \cdot \max_{z\in\psi(\partial Q_n)} \left|\frac{r(z)}{|z-z_0|}\right| \\
&= M^2 \cdot L(\partial Q)^2 \cdot \max_{z\in\psi(\partial Q_n)} \left|\frac{r(z)}{|z-z_0|}\right|.
\end{aligned}
$$

Der Term $M^2 \cdot L(\partial Q)^2$ ist unabhängig von n, während $\max_{z\in\psi(\partial Q_n)} \left|\frac{r(z)}{|z-z_0|}\right|$ für $n \to \infty$ gegen Null konvergiert (da es dies für $z \to z_0$ tut). Somit gilt $\left|\int_{\psi(\partial Q)} f(z)\ \mathrm{d}z\right| < \epsilon$ für alle $\epsilon > 0$, d.h.

$$\int_{\psi(\partial Q)} f(z)\ \mathrm{d}z = 0.$$

$\square$

Allgemein lässt sich der Cauchysche Integralsatz nicht nur für einen Quader, sondern für die von einem geschlossenen Weg eingeschlossene Fläche formulieren (d.h. f soll auf dieser gesamten eingeschlossenen Fläche holomorph sein). Was genau mit eingeschlossener Fläche gemeint ist, ist aber mathematisch schwer zu definieren. Das Beispiel 4.31 verdeutlicht aber bereits, dass wir mit unserer Formulierung des Cauchyschen Integralsatzes viele Formen dieser eingeschlossenen Flächen berücksichtigen.

Wie im Cauchyschen Integralsatz wollen wir uns im Folgenden auf stetig differenzierbare (und nicht nur stückweise stetig differenzierbare) Wege konzentrieren:

Bemerkung 4.32. Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg und sei $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ eine Unterteilung, so dass $\gamma_{|[t_{i-1},t_i]}$ stetig differenzierbar ist für alle $i = 1, \ldots, n$. Wähle eine monoton wachsende und stetig differenzierbare Funktion $\psi : [a,b] \to [a,b]$ mit $\psi(t_i) = t_i$ und $\psi'(t_i) = 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Für den umparametrisierten Weg

$\widetilde{\gamma} := \gamma \circ \psi$ gilt dann
$$(\widetilde{\gamma}_{|[t_{i-1},t_i]})'(t_i) = 0 = (\widetilde{\gamma}_{|[t_{i-1},t_i]})'(t_{i-1}).$$
Die Wegstücke $\widetilde{\gamma}_{|[t_{i-1},t_i]}$ lassen sich also zu einem überall stetig differenzierbarem Weg $\widetilde{\gamma}$ zusammensetzen.

4.3. **Homotopie von Wegen.** In Beispiel 4.31 konnten wir den Cauchyschen Integralsatz für die Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$ nicht auf den Weg γ_1 aus Abbildung 5 anwenden. Der Grund dafür war, dass f nicht auf der ganzen von γ_1 eingeschlossenen Fläche holomorph ist. Diese hat im Punkt 0 ein "Loch" und Wege um ein solches Loch können nicht "stetig zusammengezogen werden". Dies motiviert...

Definition 4.33. Seien $D \subseteq \mathbb{C}$, $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to D$ stetig differenzierbare Wege.

(a) Seien $\gamma_0(a) = \gamma_1(a) =: w$ und $\gamma_0(b) = \gamma_1(b) =: z$. Gibt es eine stetig differenzierbare Abbildung $H : [a,b] \times [0,1] \to D$ mit
  (i) $H(t,0) = \gamma_0(t)$ und $H(t,1) = \gamma_1(t)$ für alle $t \in [a,b]$;
  (ii) $H(a,s) = w$ und $H(b,s) = z$ für alle $s \in [0,1]$,
  so heißen γ_0 und γ_1 homotop (relativ zu den Endpunkten a und b) in D und wir schreiben $\gamma_0 \sim \gamma_1$. Die Abbildung H heißt Homotopie von γ_0 nach γ_1.
  (Anschauung: γ_0 lässt sich innerhalb von D stetig in γ_1 deformieren, bei Festhalten von Anfangs- und Endpunkt.)

(b) Sind γ_0 und γ_1 geschlossen, so heißen diese frei homotop in D, wenn es eine stetig differenzierbare Abbildung $H : [a,b] \times [0,1] \to D$ gibt mit
  (i) $H(t,0) = \gamma_0(t)$ und $H(t,1) = \gamma_1(t)$ für alle $t \in [a,b]$;
  (ii) $H(a,s) = H(b,s)$ für alle $s \in [0,1]$,
  Wir schreiben $\gamma_0 \sim_{\text{frei}} \gamma_1$.

(c) Ein geschlossener Weg $\gamma : [a,b] \to D$ heißt nullhomotop in D, wenn er homotop zum konstanten Weg $[a,b] \to D, t \mapsto \gamma(a) = \gamma(b)$ ist. Wir schreiben $\gamma \sim 0$.

Eine wichtige Folgerung aus dem Cauchyschen Integralsatz ist, dass Wegintegrale invariant unter Homotopie sind:

Folgerung 4.34. *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to D$ Wege. Dann gilt:*

(a) $\gamma_0 \sim \gamma_1$ *oder* $\gamma_0 \sim_{\textit{frei}} \gamma_1 \;\Rightarrow\; \int_{\gamma_0} f(z)\ dz = \int_{\gamma_1} f(z)\ dz.$

(b) γ_0 *geschlossen,* $\gamma_0 \sim 0 \Rightarrow \int_{\gamma_0} f(z)\ dz = 0.$

Beweis. Zu (a): Sei H die Homotopie von γ_0 nach γ_1 und wende den Cauchyschen Integralsatz mit $H = \psi$ und $Q = [a,b] \times [0,1]$ an. Sei zunächst $\gamma_0 \sim \gamma_1$. Die vertikalen Seiten von Q, d.h. $\{a\} \times [0,1]$ und $\{b\} \times [0,1]$, werden unter H (aufgrund von Eigenschaft (ii) aus Definition 4.33 (a)) auf einen Punkt abgebildet. Ihr Beitrag zum Wegintegral $\int_{H(\partial Q)} f(z)\ \mathrm{d}z$ verschwindet daher. Die beiden horizontalen Seiten von Q werden auf γ_0 bzw. γ_1 abgebildet. Daher ist
$$\int_{\gamma_0} f(z)\ \mathrm{d}z - \int_{\gamma_1} f(z)\ \mathrm{d}z = 0.$$
Ist $\gamma_0 \sim_{\text{frei}} \gamma_1$, so liefern die vertikalen Seiten von Q, d.h. $\{a\} \times [0,1]$ und $\{b\} \times [0,1]$, wegen (ii) aus Definition 4.33 (b) dieselben Wege, aber mit umgekehrter Orientierung. Ihr Beitrag zu $\int_{H(\partial Q)} f(z)\ \mathrm{d}z$ verschwindet daher auch hier. Jetzt argumentieren wir analog zum Fall $\gamma_0 \sim \gamma_1$.

Zu (b): Wir wenden Teil (a) an, wobei γ_1 jetzt der konstante Weg sei. Insbesondere ist $\gamma_1'(t) = 0$. Dann folgt

$$\int_{\gamma_0} f(z)\ \mathrm{d}z \overset{(a)}{=} \int_{\gamma_1} f(z)\ \mathrm{d}z \overset{\text{(Def.)}}{=} \int_a^b f(\gamma_1(t)) \underbrace{\gamma_1'(t)}_{=0}\ \mathrm{d}t = 0.$$

□

Beispiel 4.35. Sei $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und betrachte die beiden Wege

$$\gamma_0 : [0, 2\pi] \to D,\ t \mapsto r \cdot \exp(it),$$
$$\gamma_1 : [0, 2\pi] \to D,\ t \mapsto c + r \cdot \exp(it).$$

Beide Wege beschreiben geschlossene Kreislinien vom Radius r, γ_1 um den Mittelpunkt 0, γ_0 um den Mittelpunkt c (siehe auch Beispiel 4.2).

Ist $|c| < r$, so liegt c in der von γ_0 eingeschlossenen Fläche (siehe auch Abbildung 7).

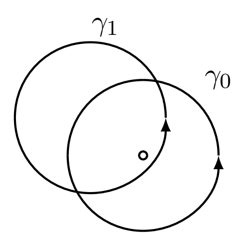


Abbildung 7. Homotope Kreislinien.

In diesem Fall sind γ_0 und γ_1 **frei** homotop in D mit (freier) Homotopie

$$H : [0, 2\pi] \times [0, 1] \to D,\ (t, s) \mapsto sc + r \exp(it).$$

Dies ist eine (freie) Homotopie, denn:

- $|H(s,t)| = |sc + r\exp(it)| \geq |r \exp(it)| - |sc| \geq r - |c| > 0$, d.h. $H(s,t) \in D$;
- H ist stetig differenzierbar;
- Für alle $t \in [0, 2\pi],\ s \in [0, 1]$ gilt:

$$H(t, 0) = r \cdot \exp(it) = \gamma_0(t),$$
$$H(t, 1) = c + r \cdot \exp(it) = \gamma_1(t),$$
$$H(0, s) = sc + r = H(2\pi, s).$$

Nach Folgerung 4.34 (a) gilt:

$$\int_{\gamma_0} \frac{1}{z}\ \mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} \frac{1}{z}\ \mathrm{d}z.$$

Die Wege γ_0 und γ_1 können nach Folgerung 4.34 (b) jedoch nicht nullhomotop sein, da nach Beispiel 4.9 gilt:

$$0 \neq i2\pi = \int_{\gamma_0} \frac{1}{z}\ \mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} \frac{1}{z}\ \mathrm{d}z.$$

Ist $|c| > r$, so liegt der Nullpunkt nicht im Inneren des Kreises γ_1 (siehe auch Abbildung 8). In diesem Fall gilt

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z}\ \mathrm{d}z = 0 \neq i2\pi = \int_{\gamma_1} \frac{1}{z}\ \mathrm{d}z.$$

Nach Folgerung 4.34 (a) können die Wege γ_0 und γ_1 also in diesem Fall nicht homotop sein.

Die Homotopie von γ_0 und γ_1 hängt aber wesentlich von der Menge D ab. Betrachten wir etwa $D = \mathbb{C}$, so sind γ_0 und γ_1 **frei** homotop und zwar unabhängig von der Lage des Punktes c.

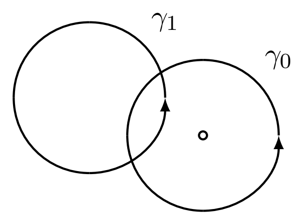


ABBILDUNG 8. Nicht-homotope Kreislinien.

Beispiel 4.36. Die Kreislinie

$$\gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ t \mapsto \exp(it)$$

ist homotop in $\mathbb{C}$ zum konstanten Weg $\gamma_0(t) = 1$. Der Anfangs- und Endpunkt beider Wege ist 1. M.a.W.: γ_1 ist nullhomotop. Die Homotopie ist gegeben durch

$$H : [0, 2\pi] \times [0, 1] \to \mathbb{C}, (t, s) \mapsto (1 - s) + s \exp(it),$$

denn:

- $H(t, 0) = 1 = \gamma_0(t)$ für alle $t \in [0, 2\pi]$;
- $H(t, 1) = \exp(it) = \gamma_1(t)$ für alle $t \in [0, 2\pi]$;
- $H(0, s) = 1 = (1 - s) + s = (1 - s) + s \exp(i2\pi) = H(2\pi, s)$ für alle $s \in [0, 1]$.

Definition 4.37. Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$. Dann heißt D einfach zusammenhängend, wenn D wegzusammenhängend ist und jeder geschlossene Weg in D nullhomotop (in D) ist.

Beispiel 4.38.

(a) Die Menge $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist nicht einfach zusammenhängend, denn zwar ist D wegzusammenhängend, aber in Beispiel 4.35 haben wir gesehen, dass nicht jeder Weg in D nullhomotop ist.

(b) $D = \mathbb{C}$ ist einfach zusammenhängend, denn $\mathbb{C}$ ist offensichtlich wegzusammenhängend und ist $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein geschlossener Weg, so ist

$$\begin{aligned} H : [a, b] \times [0, 1] &\to \mathbb{C} \\ (t, s) &\mapsto (1 - s)\gamma(t) + s(\gamma(a)) \end{aligned}$$

eine Homotopie von γ zum konstanten Weg in $\gamma(a) = \gamma(b)$.

(c) Ebenso wie in (b) argumentiert man, dass $B_r(z_0)$ für $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend ist.

Bemerkung 4.39. Anschaulich hat man sich die einfach zusammenhängenden Teilmenge von $\mathbb{C}$ als die Mengen vorzustellen, die “nicht aus mehreren Teilen bestehen” und die auch “keine Löcher besitzen, um die man herumlaufen könnte”.

Proposition 4.40. *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gelten:*

(a) Ist D wegzusammenhängend und $f'(z) = 0$ für alle $z \in D$, so ist f konstant.

(b) *Ist D einfach zusammenhängend, so hängen Wegintegrale über f nur von Anfangs- und Endpunkt des Weges ab. Insbesondere ist $\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z = 0$ für alle geschlossenen Wege γ in D.*

Beweis. Seien $z_1, z_2 \in D$ beliebig.

Zu (a): Sei γ ein Weg in D von z_1 nach z_2. Nach Voraussetzung und Proposition 4.15 gilt:

$$0 = \int_\gamma f'(z)\ \mathrm{d}z = f(z_2) - f(z_1).$$

Zu (b): Seien γ_1 und γ_2 Wege von z_1 nach z_2 und betrachte den geschlossenen Weg $\widetilde{\gamma} := \gamma_1 + \gamma_2^{-1}$. Da D einfach zusammenhängend ist, ist $\widetilde{\gamma}$ nullhomotop. Aus Folgerung 4.34 (b) erhalten wir:

$$0 = \int_{\widetilde{\gamma}} f(z)\ \mathrm{d}z \overset{(4.23)}{=} \int_{\gamma_1} f(z)\ \mathrm{d}z + \int_{\gamma_2^{-1}} f(z)\ \mathrm{d}z \overset{(4.22)}{=} \int_{\gamma_1} f(z)\ \mathrm{d}z - \int_{\gamma_2} f(z)\ \mathrm{d}z$$

□

ENDE 6. VORLESUNG

Als direkte Konsequenz aus Proposition 4.40 (b) und Satz 4.24 erhalten wir:

Folgerung 4.41. *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann besitzt f eine Stammfunktion auf D (d.h. insbesondere hängt das Wegintegral $\int_\gamma f(z)\ dz$ nur von Anfangs- und Endpunkt des Weges γ ab).*

Beispiel 4.42. Die komplexe Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$ ist holomorph auf $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Da $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ nicht einfach zusammenhängend ist, können wir die obige Folgerung hier nicht anwenden.

Schränken wir den Definitionsbereich jedoch auf die Menge

$$D := \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_{\leq 0} = \{r\exp(i\varphi) \mid r \in \mathbb{R}_{>0},\ -\pi < \varphi < \pi\}$$

ein, so besitzt f nach Folgerung 4.41 eine Stammfunktion auf D. Man kann zeigen, dass diese durch den komplexen Logarithmus

$$\log : D \to \mathbb{C},\ r\exp(i\varphi) \mapsto \log(r) + i\varphi$$

gegeben ist.

4.4. **Cauchysche Integralformeln.** Aus dem Cauchyschen Integralsatz folgern wir nun einige Eigenschaften holomorpher Funktionen, welche aus Sicht der reellen Analysis sicher überraschend sind.

Satz 4.43 (Cauchysche Integralformel)**.** *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Weiter sei $B := B_r(z_0)$ für ein $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und $z_0 \in D$ derart, dass $\overline{B} \subseteq D$. Dann gilt für jedes $z \in B$:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B} \frac{f(w)}{w - z}\ dw,$$

wobei wir ∂B als den positiv orientierten Weg auf dem Rand der Kreisscheibe auffassen.

Insbesondere ist f auf B bereits durch die Werte auf dem Rand von B festgelegt.

Beweis. Wir berechnen das Integral $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B}\frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w$. Die Funktion $\frac{f(w)}{w-z}$ ist auf $D\setminus\{z\}$ holomorph. Nach Folgerung 4.34 können wir ∂B daher durch einen Weg γ ersetzen, der zu ∂B homotop ist. Wir wählen γ als die positiv orientierte Kreislinie um z mit Radius $\epsilon > 0$ derart, dass $B_\epsilon(z) \subseteq B_r(z_0)$ (konkret lässt sich eine Homotopie von ∂B zu γ auf $D\setminus\{z\}$ sehr ähnlich zu der in Beispiel 4.35 angeben). Es gilt:

$$\int_{\partial B}\frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w = \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w = \int_\gamma \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,\mathrm{d}w + \int_\gamma \frac{f(z)}{w-z}\,\mathrm{d}w.$$

Mit der Substitution $u := w-z$ erhalten wir

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{w-z}\,\mathrm{d}w = f(z)\int_{\gamma'}\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = f(z)2\pi i,$$

wobei γ' eine positiv orientierte Kreislinie um 0 mit Radius ϵ ist und die letzte Gleichheit nach Beispiel 4.9 gilt.

Es bleibt zu zeigen, dass

$$\int_\gamma \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,\mathrm{d}w = 0.$$

Der Integrand ist hier holomorph auf $D\setminus\{z\}$ und durch die Funktion

$$D\to\mathbb{C},\ w\mapsto \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} & \text{wenn } w\in D\setminus\{z\} \\ f'(z) & \text{wenn } w = z \end{cases}$$

lässt er sich (via $f'(z)$) stetig fortsetzen. Die Funktion $g(w) = \left|\frac{f(w)-f(z)}{w-z}\right|$ ist auf der kompakten Menge $\overline{B}\subseteq D$ stetig und besitzt daher auf $\overline{B}$ ein Maximum M.

Mit Lemma 4.30 erhalten wir

$$\left|\int_\gamma \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,\mathrm{d}w\right| \le L(\gamma)\cdot M \overset{(4.5)}{=} 2\pi\epsilon\cdot M.$$

Insbesondere gilt also

$$\int_\gamma \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,\mathrm{d}w \to 0 \text{ für } \epsilon\to 0.$$

□

Beispiel 4.44. Wir wenden die Cauchysche Integralformel an mit $f(w) = \exp(w)$, $z=-1$, $r=2$ und $z_0 = 0$. Dann gilt:

$$f(-1) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B}\frac{\exp(w)}{w+1}\,\mathrm{d}w.$$

D.h.

$$\int_{\partial B}\frac{\exp(w)}{w+1}\,\mathrm{d}w = 2\pi i\cdot f(-1) = 2\pi i\cdot\exp(-1).$$

Man beachte, dass wir für die Berechnung dieses Integrals keine Stammfunktion benötigt haben.

Beispiel 4.45. Sei γ die positiv orientierte Kreislinie um $2i$ mit Radius 1. Wir wollen

$$\int_\gamma \frac{1}{z^2+4}\ \mathrm{d}z$$

bestimmen. Es ist

$$\frac{1}{z^2+4} = \frac{1}{(z-2i)(z+2i)} = \frac{f(z)}{z-2i},$$

wobei wir $f(z) := \frac{1}{z+2i}$ setzen. Da $f(z)$ auf $\overline{B_1(2i)}$ holomorph ist, liefert die Cauchysche Integralformel

$$\int_\gamma \frac{1}{z^2+4}\ \mathrm{d}z = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-2i}\ \mathrm{d}z = 2\pi i \cdot f(2i) = \frac{\pi}{2}.$$

Bemerkung 4.46. Betrachte $f(z) = \frac{1}{z}$ und $B := B_1(0)$ die offene Kreisscheibe um 0 mit Radius 1. Insbesondere ist f also **nicht** überall im Inneren von B holomorph. Der Term

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B} \frac{f(w)}{w-z}\ \mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B} \frac{1}{w(w-z)}\ \mathrm{d}w$$

aus der Cauchyschen Integralformel ist beschränkt. Es gilt jedoch $|f(z)| = \frac{1}{|z|} \to \infty$ für $z \to 0$.

Die Gleichheit aus der Cauchyschen Integralformel kann hier also in der Regel nicht gelten. Wir sehen somit, dass es notwendig ist anzunehmen, dass f im Inneren von B holomorph ist.

Folgerung 4.47 (Mittelwertsatz)**.** *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und $B := B_r(z_0)$ für ein $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und $z_0 \in D$. Dann gilt*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + r\exp(it))\ dt.$$

(Mit anderen Worten: Der Funktionswert im Mittelpunkt z_0 von B ist der Mittelwert der Funktionswerte auf ∂B.)

Beweis. Wir parametrisieren die Kreislinie ∂B durch

$$\gamma : [0, 2\pi] \to D,\ t \mapsto z_0 + r\exp(it).$$

Mit Satz 4.43 erhalten wir

$$\begin{aligned}
f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B} \frac{f(w)}{w-z_0}\ \mathrm{d}w \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z_0}\ \mathrm{d}w \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t)-z_0}\gamma'(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r\exp(it))}{z_0 + r\exp(it) - z_0} ir\exp(it)\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + r\exp(it))\ \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

□

Satz 4.48 (Maximumsprinzip). *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $z_0 \in D$ derart, dass $|f|$ ein lokales Maximum in z_0 hat (d.h. $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ für alle z in einer Umgebung von z_0 in D). Dann ist f konstant in einer Umgebung von z_0.*

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es ein $r \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $|f|$ auf der Umgebung $B := B_r(z_0) \subseteq D$ das lokale Maximum z_0 annimmt. Nach Folgerung 4.47 gilt für alle $0 < s < r$:

$$\begin{aligned} |f(z_0)| &= \frac{1}{2\pi}\Big|\int_0^{2\pi} f(z_0 + s\exp(it))\,\mathrm{d}t\Big| \\ &\overset{(4.27)}{\leq} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + s\exp(it))|\,\mathrm{d}t \\ &\overset{(z_0 \text{ lok. Max.})}{\leq} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0)|\,\mathrm{d}t \\ &= |f(z_0)|, \end{aligned}$$

d.h. überall gilt die Gleichheit. Insbesondere gilt

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + s\exp(it))|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0)|\,\mathrm{d}t$$

und somit wegen der Linearität des Integrals

$$\int_0^{2\pi} |f(z_0)| - |f(z_0 + s\exp(it))|\,\mathrm{d}t = 0.$$

Für den Integrand gilt aber, dass $|f(z_0)| - |f(z_0 + s\exp(it))| \geq 0$, da z_0 ein lokales Maximum auf B ist. Hieraus können wir

$$|f(z_0)| - |f(z_0 + s\exp(it))| = 0$$

folgern, da f und somit auch der Integrand stetig sind (siehe auch [Koe, Par. 11.3, Lemma]).

Also ist $|f|$ konstant auf B. Es bleibt zu zeigen, dass auch f konstant auf B ist.

Wir schreiben $f = u + iv$ mit $u = \mathrm{Re}(f),\ v = \mathrm{Im}(f)$. Da $|f|$ konstant ist, gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ mit

$$|f(z)|^2 = u(x,y)^2 + v(x,y)^2 = c \quad \text{für alle } z = x + iy \in B \tag{19}$$

Ist $c = 0$, so ist auch $f_{|B} = 0$. Sei daher $c \neq 0$. Auf B erhalten wir dann nach (19):

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial |f|^2}{\partial x} &= 2uu_x + 2vv_x \overset{\text{C.-R.-Dgl.(9)}}{=} 2uv_y - 2vu_y \\ \text{und } 0 = \frac{\partial |f|^2}{\partial y} &= 2uu_y + 2vv_y \overset{\text{C.-R.-Dgl.(9)}}{=} -2uv_x + 2vu_x. \end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir

$$\underbrace{\begin{pmatrix} u & v \\ v & -u \end{pmatrix}}_{=:A_1} \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} = 0 \quad \text{und} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix}}_{=:A_2} \cdot \begin{pmatrix} u_y \\ v_y \end{pmatrix} = 0 \tag{20}$$

Wegen $\det(A_1) = -(u^2 + v^2) = -c \neq 0$, ist A_1 invertierbar und wir erhalten

$$\begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} = A_1^{-1}A_1 \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} \overset{(20)}{=} A_1^{-1} \cdot 0 = 0,$$

d.h. $u_x = v_x = 0$ auf B. Vollkommen analog können wir mit A_2 argumentieren, um $u_y = v_y = 0$ auf B zu erhalten. Also sind u und v konstant auf B und somit ist auch $f = u + iv$ konstant auf B. □

Eine analoge Aussage gilt für das Minimum:

Satz 4.49 (Minimumsprinzip)**.** *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $z_0 \in D$ derart, dass $|f|$ ein lokales Minimum in z_0 hat (d.h. $|f(z_0)| \leq |f(z)|$ für alle z in einer Umgebung von z_0 in D) und $f(z_0)$ ungleich 0 ist. Dann ist f konstant in einer Umgebung von z_0.*

Beweis. Wende das Maximumsprinzip auf $\frac{1}{f}$ an. □

Bemerkung 4.50. Wir müssen $f(z_0) \neq 0$ voraussetzen, da sonst jede holomorphe Funktion in der Umgebung einer Nullstelle konstant sein müsste (was sicher nicht der Fall ist).

ENDE 7. VORLESUNG

Bemerkung 4.51. Aussagen, die wir hier nur für offene Kreisscheiben formuliert haben (wie etwa die Cauchyschen Integralformeln) lassen sich auch allgemeiner für geschlossene Wege in einfach zusammenhängenden Gebieten formulieren. Die offene Kreisscheibe ist hier "nur" ein Spezialfall eines einfach zusammenhängenden Gebietes.

Folgerung 4.52. *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und sei $B := B_r(z_0)$ für ein $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und $z_0 \in D$ derart, dass $\overline{B} \subseteq D$. Dann ist f unendlich oft komplex differenzierbar in D und für jedes $z \in B$ gilt*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\, dw,$$

wobei wir ∂B als den positiv orientierten Weg auf dem Rand der Kreisscheibe auffassen und mit $f^{(n)}$ die n-te komplexe Ableitung bezeichnen.

Beweis. Durch Induktion über n. Der Fall $n = 0$ ist durch die Cauchysche Integralformel 4.43 gegeben. Sei daher $n \geq 1$ beliebig. Nach I.V. existiert $f^{(n-1)}$. Wir betrachten den Differenzenquotienten:

(21)
$$\frac{f^{(n-1)}(z+h) - f^{(n-1)}(z)}{h} \overset{\text{(I.V.)}}{=} \frac{(n-1)!}{2\pi i} \cdot \frac{1}{h} \int_{\partial B} f(w) \left(\frac{1}{(w-(z+h))^n} - \frac{1}{(w-z)^n} \right) \mathrm{d}w$$

Allgemein gilt

(22)
$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

Mit $x = \frac{1}{w-(z+h)}$ und $y = \frac{1}{w-z}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(w-(z+h))^n} - \frac{1}{(w-z)^n} &\overset{(22)}{=} (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}) \\
&= \frac{w-z-(w-(z+h))}{(w-(z+h))(w-z)}(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}) \\
&= h \cdot \underbrace{\frac{1}{(w-z-h)(w-z)}}_{\to \frac{1}{(w-z)^2} \text{ für } h \to 0} \underbrace{(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})}_{\to \frac{n}{(w-z)^{n-1}} \text{ für } h \to 0}
\end{aligned}$$

Aus (21) erhalten wir also für $h \to 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{f^{(n-1)}(z+h) - f^{(n-1)}(z)}{h} &\to \frac{(n-1)!}{2\pi i} \cdot \frac{1}{h} \int_{\partial B} f(w) \frac{1}{(w-z)^2} \cdot \frac{n}{(w-z)^{n-1}} \, \mathrm{d}w \\
&= \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} \, \mathrm{d}w
\end{aligned}$$

□

Folgerung 4.53 (Satz von Goursat)**.** *Holomorphe Funktionen sind beliebig oft komplex differenzierbar.*

5. Potenzreihen

Wir wollen in diesem Kapitel sehen, dass holomorphe Funktionen ananlytisch sind, d.h. sie können lokal in eine Potenzreihe entwickelt werden.

5.1. Konvergenzradius.

Definition 5.1. Eine Potenzreihe um $z_0 \in \mathbb{C}$ ist ein Ausdruck der Form

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

wobei $a_n \in \mathbb{C}$ für alle $n \geq 0$. Der Konvergenzradius einer solchen Potenzreihe ist definiert als

$$r := \sup\{|z - z_0| \mid f \text{ konvergiert in } z_0\} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}.$$

Aus dem Majorantenkriterium können wir folgern, dass $f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit

- $|z - z_0| < r$ absolut konvergiert,
- $|z - z_0| > r$ divergiert.

Für den Kreisrand $|z - z_0| = r$ können wir keine solche Aussage machen (betrachte z.B. die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$). Die Reihe kann dann sowohl konvergieren als auch divergieren.

Wir nennen $B_r(z_0)$ den Konvergenzkreis der Potenzreihe.

Als direkte Konsequenz aus dem Quotientenkriterium 2.11 erhalten wir:

Proposition 5.2. *Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ eine Potenzreihe um $z_0 \in \mathbb{C}$. Dann hat f den Konvergenzradius*

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

falls dieser im eigentlichen oder uneigentlichen Sinne existiert (d.h. in $\mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ liegt). Wie üblich: $\frac{1}{0} := \infty$, $\frac{1}{\infty} := 0$.

Exisitiert der Grenzwert in der vorherigen Proposition nicht, so erhalten wir keine Aussage über den Konvergenzradius.

Beispiel 5.3. $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ hat den Konvergenzradius ∞.

Definition. Eine Potenzreihe $f(z)$ heißt gleichmäßig konvergent, wenn ihre Folge der Partialsummen gleichmäßig gegen $f(z)$ konvergiert

Bemerkung 5.4. Ist $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ eine Potenzreihe um $z_0 \in \mathbb{C}$ mit Konvergenzradius r, so konvergiert $f(z)$ gleichmäßig auf $B_{r'}(z_0)$ für alle $r' < r$.

Beweis. Die Potenzreihe $f(z)$ ist absolut konvergent auf $B_{r'}(z_0)$ nach [GdM, Lemma 4.56]. Zu $\epsilon > 0$ wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n (z - z_0)^n| < \epsilon$. Die verallgemeinerte Dreiecksungleichung für absolut konvergente Reihen liefert für all $m \geq N$:

$$\left| f(z) - \sum_{n=0}^{m} a_n (z - z_0)^n \right| \leq \sum_{n=N}^{\infty} |a_n (z - z_0)^n| < \epsilon.$$

$\square$

Wir wollen nun zeigen, dass Potenzreihen auf ihrem Konvergenzkreis holomorph sind. Wir starten mit folgendem...

Lemma 5.5. Die Potenzreihen $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ und $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$ haben denselben Konvergenzradius.

Beweis. Sei r der Konvergenzradius von f und $z' \in \mathbb{C}$ mit $|z'-z_0| < r$. Wir nehmen $z' \neq z_0$ an und sei $z \in \mathbb{C}$ beliebig mit $|z-z_0| < |z'-z_0|$. Es ist

$$\begin{aligned} |g(z)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |na_n(z-z_0)^{n-1}| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(z'-z_0)^n| \cdot n \cdot \frac{|(z-z_0)^{n-1}|}{|(z'-z_0)^{n-1}|} \cdot \frac{1}{|(z'-z_0)|}. \end{aligned}$$

Wegen $|z'-z_0| < r$ ist $|a_n(z'-z_0)^n|$ durch ein $M \in \mathbb{R}$ beschränkt. Mit

$$q := \left| \frac{z-z_0}{z'-z_0} \right| < 1$$

erhalten wir

$$|g(z)| \leq \frac{M}{|z'-z_0|} \sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1} = \frac{M}{|z'-z_0|} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)q^n.$$

Wegen $q < 1$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n$ nach dem Quotientenkriterium. Der Konvergenzradius von g ist also durch den von f beschränkt. Analog zeigt man dies mit f und g in vertauschten Rollen. □

Proposition 5.6. *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge holomorpher Funktionen auf D, die punkweise gegen die Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ kovergieren. Weiter seien die Ableitungen f_n' stetig auf D und die Folge $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ auf D gleichmäßig konvergent. Dann ist f holomorph auf D und $f' = \lim_{n\to\infty} f_n'$.*

Man beachte, dass die hier beschriebene Vertauschbarkeit von Limes und Ableitung nicht direkt aus der reellen Analysis gefolgert werden kann. Grund ist der durch die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen beschriebene Unterschied zwischen reeller und komplexer Differenzierbarkeit.

Beweis. Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Setze $f = u + iv$ und $f_n = u_n + iv_n$ mit $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$, $u_n = \operatorname{Re} f_n$ und $v_n = \operatorname{Im} f_n$. Da u und u_n reelle Funktionen sind, gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\partial u_n}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{23}$$

nach [GdM, Satz 7.8]. Nach Vorraussetzung konvergiert $\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)_n$ auf D gleichmäßig, d.h. die Grenzfunktion $\frac{\partial u}{\partial x}$ ist stetig auf D (siehe auch [GdM, Kapitel 7.2]). Analog gilt dies für $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ und $\frac{\partial v}{\partial y}$. Somit ist $f = u + iv$ reell differenzierbar. Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial u_n}{\partial x}$, $\frac{\partial u_n}{\partial y}$, $\frac{\partial v_n}{\partial x}$ und $\frac{\partial v_n}{\partial y}$ erüllen die Cauchy-Riemanschen Differentialgleichungen (9), da f_n holomorph ist. Aus (23) und den analogen Aussagen für die anderen partiellen Ableitungen folgt, dass auch $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ und $\frac{\partial v}{\partial y}$ die Cauchy-Riemanschen Differentialgleichungen erfüllen.

Nach Satz 3.12 ist f holomorph auf D und

$$f' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x} + i\frac{\partial v_n}{\partial x}\right) = \lim_{n\to\infty} f_n'.$$

□

Folgerung 5.7. *Jede Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ist auf ihrem Konvergenzkreis holomorph mit Ableitung $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$.*

Beweis. nach Lemma 5.5 haben $f(z)$ und $g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$ den gleichen Konvergenzradius r. Beide Reihen konvergieren gleichmäßig auf $B_{r'}(z_0)$ für alle $r' < r$ nach Bemerkung 5.4.

Wenden wir Proposition 5.6 auf die Partialsummen von f und g an, so erhalten wir die Behauptung für $B_{r'}(z_0)$. Mit $r' \to r$ folgt die Aussage für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0| < r$. □

5.2. **Taylorreihen.** Wir haben gesehen, dass Potenzreihen auf ihrem Konvergenzkreis holomorph sind. Jetzt wollen wir sehen, dass holomorphe Funktionen analytisch sind, d.h. lokal in einen Potenzreihe entwickelbar. Diese Aussage ist in der reellen Analysis falsch. Selbst unendlich oft differenzierbare Funktionen sind dort nicht notwendigerweise analytisch.

Folgerung 5.8 (Taylorformel für Potenzreihen)**.** *Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. Dann ist f auf ihrem Konvergenzkreis $B_r(z_0)$ beliebig oft komplex differenzierbar*

Die komplexen Ableitungen $f^{(n)}$ können gliedweise berechnet werden und es ist

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0).$$

Insbesondere gilt für alle $z \in B_r(z_0)$ die Taylorformel

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

Beweis. Die ersten beiden Aussagen folgen aus Folgerung 5.7 und dem Satz von Goursat 4.53. Gliedweises Differenzieren liefert

$$f^{(n)}(z) = \sum_{\ell=n}^{\infty} \ell \cdot (\ell-1) \cdots (\ell-n+a) a_\ell (z-z_0)^\ell.$$

Für $z = z_0$ erhalten wir $f^{(n)}(z_0) = n! \cdot a_n$, d.h. $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$. □

Satz 5.9 (Entwicklungssatz für holomorphe Funktionen)**.** *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $z_0 \in D$ und sei $B := B_r(z_0) \subseteq D$ für ein $r \in \mathbb{R}_{>0}$ derart, dass $\overline{B} \subseteq D$. Dann lässt sich f in B in eine Potenzreihe um z_0 mit Konvergenzradius mindestens r entwickeln. Für alle $z \in B$ gilt:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.$$

Diese Reihe heißt Taylorreihe. *Weiter gilt*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B_{r'}(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\, dw$$

für alle $n \geq 0$ und alle $r' < r$.

Beweis. Blatt 4, Aufgabe 3 und Folgerung 4.52. □

Beispiel 5.10. Die (reelle) Reihe

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

hat um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ den Konvergenzradius 1. Für $|x| < 1$ stellt sie also die reelle Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ dar. Diese Funktion ist überall stetig, unendlich oft differenzierbar und auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Warum konvergiert sie trotzdem nur für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$?

Dazu gucken wir uns die entsprechende komplexe Funktion

$$f : D = \mathbb{C} \setminus \{-i, i\} \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{1+z^2}$$

an. Diese ist auf D holomorph. Die Taylorreihe um dem Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ hat den Konvergenzradius 1. Die Taylorreihe um dem Entwicklungspunkt $z_0 = 1$ bzw. $z_0 = -1$ hat den Konvergenzradius $\sqrt{2}$. In allen drei Fällen gibt der Konvergenzradius genau den Abstand zur nächsten Singularität i bzw. $-i$ an. Im Komplexen ist der kleine Konvergenzradius daher direkt ersichtlich. Im Reellen hingegen sieht man die komplexen Singularitäten hingegen natürlich nicht.

ENDE 8. VORLESUNG

Definition 5.11. Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Ein Punkt $z \in \partial D$ heißt Singularität von f, wenn f nicht holomorph nach z fortgesetzt werden kann.

Folgerung 5.12. *Jede Potenzreihe hat eine Singularität auf dem Rand ihres Konvergenzkreises.*

Beweis. Sei $B = B_r(z_0)$ der Konvergenzkreis der Potenzreihe $f(z)$. Angenommen f kann auf ∂B holomorph fortgesetzt werden. Dann ist f auch holomorph auf $B_{r+\epsilon}(z_0)$ mit $\epsilon > 0$. Nach Folgerung 5.8 ist f auf $B_{r+\epsilon}(z_0)$ als Potenzreihe darstellbar mit Konvergenzradius $> r$; Widerspruch. □

5.3. **Charakterisierung der Holomorphie.**

Satz 5.13 (Satz von Morera)**.** *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ stetig mit*

$$\int_\gamma f(z)\ dz = 0$$

für jeden geschlossenen Weg γ in D. Dann ist f holomorph.

Beweis. Entsprechend des Beweises von Satz 4.24 können wir eine holomorphe Stammfunktion F von f auf D konstruieren. Nach dem Satz von Goursat 4.53 ist diese insbesondere zweimal komplex differenzierbar. □

Satz 5.14 (Der große Rückblick)**.** *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ stetig. Dann sind äquivalent:*

(a) f ist holomorph.
(b) f ist reell differenzierbar und erfüllt die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.
(c) f ist unendlich oft komplex differenzierbar.
(d) f ist analytisch.
(e) f besitzt lokal eine Stammfunktion.

(f) $\int_\gamma f(z)\ dz = 0$ *für jeden in D nullhomotopen Weg γ.*
(g) Es gilt die Cauchysche Integralformel.

Beweis.

- $(a) \Leftrightarrow (b)$ gilt nach Satz 3.12.
- $(d) \Rightarrow (c)$ gilt nach Folgerung 5.7, $(c) \Rightarrow (a)$ ist trivial, $(a) \Rightarrow (d)$ gilt nach Satz 5.9.
- $(a) \Rightarrow (e)$ gilt nach Folgerung 4.41, $(e) \Rightarrow (a)$ gilt nach Goursat 4.53.
- $(a) \Rightarrow (f)$ gilt nach Folgerung 4.34 (b), $(f) \Rightarrow (e)$ gilt nach 4.40 (b) und 4.24, da jeder Punkt in D eine wegzusammenhängende, einfach zusammenhängende Umgebung besitzt.
- $(a) \Rightarrow (g)$ ist die Cauchysche Integralformel, $(g) \Rightarrow (a)$ ist der Entwicklungssatz 5.9 und sein Beweis.

□

5.4. **Satz von Liouville.**

Lemma 5.15. Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in D$ mit $\overline{B_r(z_0)} \subseteq D$ für ein $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} \cdot \max_{|z-z_0|=r} |f(z)|$$

Beweis.

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(z_0)| &\overset{(4.52)}{=} \left|\frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\ \mathrm{d}w\right| \\ &\overset{(4.30)}{\leq} \frac{n!}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \max_{|w-z_0|=r} \frac{|f(w)|}{|w-z_0|^{n+1}} \\ &= \frac{n!}{r^n} \cdot \max_{|w-z_0|=r} |f(w)|. \end{aligned}$$

□

Satz 5.16 (Satz von Liouville)**.** *Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.*

Beweis. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ beschränkt und ganz. Nach dem Entwicklungssatz 5.9 können wir f auf ganz $\mathbb{C}$ um einen Entwicklungspunkt z_0 darstellen als Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.$$

Da f beschränkt ist, gibt es ein $M \in \mathbb{R}$ mit $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Nach Lemma 5.15 ist dann

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} \cdot M\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall r > 0.$$

Mit $r \to \infty$ erhalten wir $f^{(n)}(z_0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit ist $f(z) = f^{(0)}(z_0) = f(z_0)$ für alle $z \in \mathbb{C}$, d.h. f ist konstant. □

Proposition 5.17. *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Ist $f^{(n)}(z_0) = 0$ für alle $n \geq 0$ und ein $z_0 \in D$, so ist $f = 0$.*

Beweis. Sei $z_1 \in D$ beliebig. Wir wollen $f(z_1) = 0$ zeigen. Da D ein Gebiet ist, gibt es einen Weg $\gamma : [0,1] \to D$ von z_0 nach z_1. Betrachte die Menge

$$N := \{t \in [0,1] \mid f^{(n)}(\gamma(t)) = 0 \ \forall n \geq 0\} \subseteq [0,1]$$

Wegen $\gamma(0) = z_0$, ist $0 \in N$, d.h. N ist nicht leer. Wir könenn N schreiben als

$$N = \cap_{n\geq 0}(f^{(n)} \circ \gamma)^{-1}(\{0\}).$$

Da $\{0\}$ abgeschlossen ist und $f^{(n)} \circ \gamma$ stetig, ist N als Schnitt abgeschlossener Mengen selber abgeschlossen. Insbesondere existiert daher $t_0 := \max(N) \in N$.

- Ist $t_0 = 1$, so gilt
$$0 = f^{(n)}(\gamma(1)) = f^{(n)}(z_1) \ \forall n \geq 0,$$
d.h. insbesondere $f(z_1) = 0$.
- Ist $t_0 < 1$, so entwicklen wir f in eine Potenzreihe in einer Umgebung $B_r(\gamma(t_0))$. Nach dem Entwicklungssatz 5.9 verschwindet f auf dieser Umgebung. Insbesondere gibt es ein $t_1 \in N$ mit $t_1 > t_0$. Ein Widerspruch zur Maximalität von t_0, d.h. der Fall $t_0 < 1$ kann nicht eintreten und wir sind fertig.

□

Satz 5.18 (Identitätssatz)**.** *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f, g : D \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen. Dann sind äquivalent:*

(a) $f = g$;
(b) Es gibt ein $z_0 \in D$ mit $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$ für alle $n \geq 0$.

Beweis. Die Richtung $(a) \Rightarrow (b)$ ist klar. Für die andere Richtung wende Proposition 5.17 auf die Funktion $h := f - g$ an. □

Direkt aus Proposition 5.17 können wir auch eine Verschärfung des Maximumsprinzips folgern:

Folgerung 5.19 (Verschärftes Maximumsprinzip)**.** *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in D$ derart, dass $|f|$ ein lokales Maximum in z_0 hat. Dann ist f konstant auf ganz D.*

5.5. **Gebietstreue.** Wir wollen eine Charakterisierung der topologischen Eigenschaften einer holomorphen Funktion geben.

Satz 5.20 (Gebietstreue)**.** *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ eine nicht-konstante holomorphe Funktion. Dann ist $f(D) \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet.*

Für den Beweis benötigen wir die zwei folgenden Lemmata.

Lemma 5.21. Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. Dann gilt: Entweder sind alle $a_n = 0$ oder es gibt $0 < r' < r$ mit $f(z) \neq 0$ für alle $z \in B_{r'}(z_0) \setminus \{z_0\}$

Beweis. Nach Voraussetzung ist $m := \min\{n \mid a_n \neq 0\} < \infty$. Wir schreiben

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z),$$
$$\text{wobei } g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m}(z - z_0)^n.$$

Die Potenzreihe $g(z)$ hat denselben Konvergenzradius r und $g(z)$ ist stetig in $B_r(z_0)$ mit $g(z_0) = a_m \neq 0$. Also gibt es $0 < r' < r$ mit $g(z) \neq 0$ für alle $z \in B_{r'}(z_0)$. D.h. $f(z) \neq 0$ für alle $z \in B_{r'}(z_0) \setminus \{z_0\}$. □

Lemma 5.22. Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und beschränkt und $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ stetig sowie holomorph auf D. Dann wird das absolute Minimum von $|f|$ auf $\overline{D}$ auf dem Rand von D angenommen, sofern es ungleich 0 ist.

Beweis. Nach dem Satz von Heine-Borel (siehe [GdM, Satz 16.44] und beachte, dass wir $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ als metrischen Raum mit $(\mathbb{R}^2, |\cdot|_2)$ identifizieren können) ist $\overline{D}$ kompakt und daher existiert das absolute Minimum von $|f|$ auf $\overline{D}$.

Sei nun

$$M := \min\{|f(z)| \mid z \in \overline{D}\},$$
$$K := \{z \in \overline{D} \mid |f(z)| = M\}.$$

Wegen $K = |f|^{-1}(\{M\})$ ist K abgeschlossen. Sei $z \in \partial K \subseteq K$ beliebig. Angenommen es gilt $K \subseteq D$. Dann ist $z \in D$ und $|f|$ nimmt zwar im Punkt z das Minimum an, nicht aber in einer ganzen Umgebung von z. Dies ist ein Widerspruch zum Minimumsprinzip 4.49. D.h. $K \not\subseteq D$ und somit wird das Minimum von $|f|$ auch auf dem Rand von D angenommen. □

Beweis von Satz 5.20. Stetige Bilder von stetigen Wegen sind wieder stetige Wege, d.h. $f(D)$ ist wegzusammenhängend. Es bleibt zu zeigen, dass $f(D)$ offen ist. Sei $z_0 \in D$ beliebig. Wir haben zu zeigen, dass es ein $m > 0$ gibt mit $B_m(f(z_0)) \subseteq f(D)$. Wir nehmen $f(z_0) = 0$ an (sonst ersetzen wir f durch $f - f(z_0)$). Da f analytisch ist, können wir dies lokal in eine Potenzreihe entwickeln und Lemma 5.21 anwenden. Da f nicht-konstant ist (d.h. insbesondere nicht alle Koeffizienten der Potenzreihe gleich 0 sein können), gibt es ein $r' > 0$ so dass für $B := B_{r'}(z_0)$ gilt:

$$0 \notin f(\overline{B} \setminus \{z_0\}) \tag{24}$$

Insbesondere gilt $\overline{B} \subseteq D$. Da ∂B kompakt ist, exisitert das Minimum von $|f|$ auf ∂B:

$$0 \overset{(24)}{<} \min_{z \in \partial B} |f(z)| =: 2m \tag{25}$$

Sei $w \in B_m(0) = B_m(f(z_0))$ beliebig. Wir wollen $B_m(0) \subseteq f(D)$ zeigen, d.h. $w \in f(D)$. Wir suchen also ein $z_1 \in D$ mit $f(z_1) = w$. Äquivalent können wir zeigen, dass die Funktion

$$g : D \to \mathbb{C}, z \mapsto f(z) - w$$

eine Nullstelle $z_1 \in D$ besitzt. Für alle $z \in \partial B$ gilt

$$|g(z)| = |f(z) - w| \geq \underbrace{|f(z)|}_{\geq 2m} - \underbrace{|w|}_{<m} > m. \tag{26}$$

Andererseits gilt

$$|g(z_0)| = |f(z_0) - w| = |0 - w| = |w| < m. \tag{27}$$

D.h. $|g(z_0)| < |g(z)|$ für alle $z \in \partial B$. Nach Lemma 5.22 ist dies nur möglich, wenn g eine Nullstelle z_1 auf $\overline{B}$ besitzt. Also $f(z_1) = w \in f(\overline{B}) \subseteq f(D)$. □

ENDE 9. VORLESUNG

6. Residuentheorie

6.1. **Laurent-Reihen.** Nach dem Entwicklungssatz können wir holomorphe Funktionen lokal (d.h. auf offenen Kreisscheiben) in eine Potenzreihe entwickeln.

In diesem Kapitel entwickeln wir holomorphe Funktionen in sogenannte Laurent-Reihen. Dabei dürfen die Entwicklungspunkte sogar außerhalb des Definitionsbereiches liegen. Dies soll uns am Ende zur Residuentheorie führen mit der wir diese Vorlesung abschliessen.

Definition 6.1. Eine Laurent-Reihe um den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ ist eine formale Summe zweier komplexer Reihen

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n}_{=:f^-(z)} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n}_{=:f^+(z)} .$$

Hierbei heißt $f^-(z)$ der Hauptteil und $f^+(z)$ der Nebenteil der Laurent-Reihe.

Wir schreiben $f^-(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}$ als Potenzreihe mit Konvergenzradius $\frac{1}{r}$ ($r \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$).

Sei R der Konvergenzradius von $f^+(z)$. Dann haben wir:

- $f^+(z)$ konvergiert für $|z - z_0| < R$ absolut und divergiert für $|z - z_0| > R$.
- $f^-(z)$ konvergiert für $|z - z_0| > r$ (äquivalent $\frac{1}{|z-z_0|} < \frac{1}{r}$) absolut und divergiert für $|z - z_0| < r$.

Definition 6.2. Mit obiger Notation. Für die Laurent-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

heißt der Kreisring

$$B_{r,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$$

der Konvergenzring von f. (Für $R \leq r$ ist $B_{r,R}(z_0) = \varnothing$.)

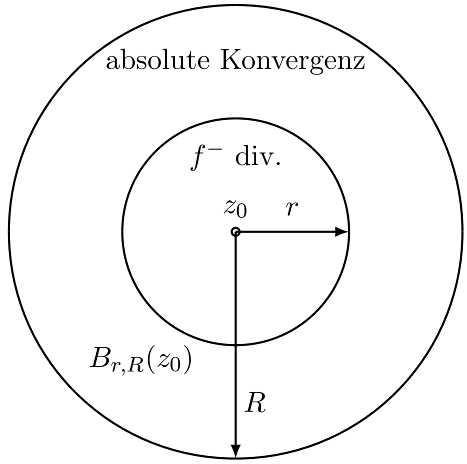


ABBILDUNG 9. Konvergenzring.

Aus Bemerkung 5.4 folgt:

Bemerkung 6.3. Die Laurent-Reihe $f(z)$ konvergiert gleichmässig auf jedem abgeschlossenen Kreisring um z_0 der ganz in $B_{r,R}(z_0)$ enthalten ist.

Beispiel 6.4.

(a) Ist $r = 0$ (d.h. $\frac{1}{r} = \infty$) und $R > 0$, so konvergiert $f(z)$ auf der punktierten Kreisscheibe $B_{0,R}(z_0)$.

(b) Betrachte

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} z^n = \underbrace{\frac{1}{z}}_{=f^-(z)} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} z^n}_{=f^+(z)}.$$

Dann ist $r = 0$ und $R = 1$, d.h. f konvergiert auf

$$B_{0,1}(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$$

absolut. Dort ergibt sie die holomorphe Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z(1-z)}$$

(c) Betrachte

$$f(z) = f^-(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-2} z^n.$$

Dann ist $r = 1$ und $R = \infty$, d.h. f konvergiert auf

$$B_{1,\infty}(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$$

absolut. Dort ergibt sie **ebenfalls** die holomorphe Funktion

$$f(z) = -\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{-1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{-1}{z^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z(1-z)}.$$

Wir erhalten also dieselbe Funktion auf disjunkten Kreisringen.

Analog zu Folgerung 5.7 erhält man, dass eine Laurent-Reihe auf ihrem Konvergenzring holomorph ist (dies gilt nach Proposition 5.6, da sie die Summe zweier Grenzfunktionen holomorpher Funktionenfolgen ist). Wie für Potenzreihen erhält man die Ableitung durch gliedweises Differenzieren.

Ebenso gilt analog zum Entwicklungssatz 5.9 für Taylor-Reihen auch für Laurent-Reihen die Umkehrung:

Satz 6.5. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Seien $z_0 \in \mathbb{C}$ und $0 \leq r < R$ reelle Zahlen mit $B_{r,R}(z_0) \subseteq D$. Dann lässt sich f eindeutig in eine Laurent-Reihe*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

entwickeln, deren Koeffizienten a_n gegeben sind durch

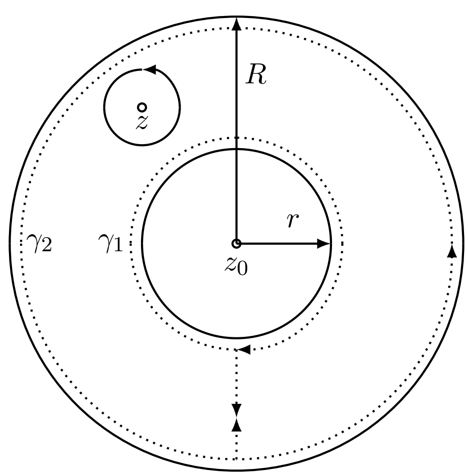
$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, dz$$

für ein beliebiges $\rho \in (r, R)$.

Beweis. Wir beginnen mit der Existenz: Sei $z \in B_{r,R}(z_0)$ beliebig. Nach der Cauchyschen Integralformel 4.43 gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{\rho'}(z)} \frac{f(w)}{w - z} \, \mathrm{d}w$$

für ein $\rho' \in (0, R - r)$ mit $\overline{B_{\rho'}(z)} \subseteq B_{r,R}(z_0)$. Wir nutzen die Homotopieinvarianz 4.34 des Wegintegrals: Wir ersetzen $\partial B_{\rho'}(z)$ durch einen Weg $\widetilde{\gamma}$ der durch zwei verbundene Kreislinien γ_1 (in negativer Orientierung) und γ_2 (in positiver Orientierung) mit Radien $r < r_1 < |z - z_0| < r_2 < R$ gegeben ist (insbesondere liegt also der Punkt z zwischen den Kreislinien γ_1 und γ_2).



Wir erhalten nach 4.23:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\gamma}} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w \\
&= \underbrace{-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1^{-1}} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w}_{=:s^-} + \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w}_{=:s^+}.
\end{aligned}$$

(Man beachte, dass sich das vertikale Verbindungsstück zwischen den Wegen γ_1 und γ_2 im Wegintegral weghebt.) Für s^+ erhalten wir (die Details wurden in Aufgabe 3 von Blatt 4 behandelt):

$$\begin{aligned}
s^+ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}}\,\mathrm{d}w \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z_0}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n\,\mathrm{d}w \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}w\right)(z-z_0)^n. \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_\rho(z_0)}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}w\right)(z-z_0)^n,
\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung wegen der Homotopieinvarianz des Wegintegrals für jedes $\rho \in (r, R)$ gilt.

Für s^- wollen wir analog argumentieren. Nach Wahl von r_1 gilt $r < r_1 < |z-z_0|$ und somit gilt für $w \in \partial B_{r_1}(z_0)$, dass $|w-z_0| = r_1$, also insgesamt $|\frac{w-z_0}{z-z_0}| < 1$. Weiter gilt

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{(z-z_0)-(w-z_0)} = \frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{w-z_0}{z-z_0}}.$$

Somit erhalten wir für s^-:

$$\begin{aligned}
s^- &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1^{-1}} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1^{-1}} \frac{f(w)}{z-w}\,\mathrm{d}w \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1^{-1}} \frac{f(w)}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{w-z_0}{z-z_0}}\,\mathrm{d}w \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1^{-1}} \frac{f(w)}{z-z_0}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n\,\mathrm{d}w \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1^{-1}} \frac{f(w)}{z-z_0}\cdot\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^{n+1}\,\mathrm{d}w \\
&= \sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1^{-1}} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}w\right)(z-z_0)^n \\
&= \sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_\rho(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}w\right)(z-z_0)^n,
\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung wieder wegen der Homotopieinvarianz des Wegintegrals für jedes $\rho \in (r,R)$ gilt.

Nun zur Eindeutigkeit der Laurent-Entwicklung: Wir betrachten dazu eine weitere Entwicklung

$$f(z) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} a_\ell (z-z_0)^\ell$$

und ein $\rho \in (r,R)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_\rho(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z &\overset{(6.3)}{=} \frac{1}{2\pi i}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} a_\ell \int_{\partial B_\rho(z_0)} (z-z_0)^{\ell-n-1}\,\mathrm{d}z \\
&\overset{(w:=z-z_0)}{=} \frac{1}{2\pi i}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} a_\ell \underbrace{\int_{\partial B_\rho(0)} w^{\ell-n-1}\,\mathrm{d}z}_{\overset{(4.16)}{=}\begin{cases} 0 & \text{wenn } \ell-n-1 \neq -1 \\ 2\pi i & \text{wenn } \ell-n-1 = -1 \end{cases}} \\
&= a_n.
\end{aligned}$$

□

ENDE 10. VORLESUNG

Bemerkung 6.6. Ist f holomorph auf $B_R(z_0)$, so gilt in der Laurent-Entwicklung von f, dass $a_n = 0$ für alle $n \leq -1$. Insbesondere stimmen also die Laurent-Entwicklung und die Taylor-Entwicklung aus 5.9 hier überein.

Beispiel 6.7. In Beispiel 6.4 haben wir gesehen, dass

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{1}{z(1-z)}$$

zwei verschiedene Laurent-Entwicklungen um $z_0 = 0$ mit disjunkten Konvergenzringen besitzt.

Mit Hilfe von Satz 6.5 können wir diese nun konstruieren. Für die Entwicklung auf der punktierten Kreisscheibe $B_{0,1}(0)$ integrieren wir entlang des Weges $\partial B_{\frac{1}{2}}(0)$:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{\frac{1}{2}}(0)} \frac{1}{(1-z)z^{n+2}}\, \mathrm{d}z \tag{28}$$

Ist $n \leq -2$, so ist der Integrand in (28) auf $B_{\frac{1}{2}}(0)$ holomorph (für $n \geq -1$ jedoch nicht). Der Cauchysche Integralsatz 4.25 und Beispiel 4.31 liefern $a_n = 0$ für $n \leq -2$.

Für $n \geq -1$ betrachte $g(z) = \frac{1}{1-z}$. Dann ist

$$g^{(n)}(z) = \frac{n!}{(1-z)^{n+1}}. \tag{29}$$

Nach der Cauchyschen Integralformel für Ableitungen 4.52 ist

$$g^{(n+1)}(0) = \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int_{\partial B_{\frac{1}{2}}(0)} \frac{1}{(1-z)z^{n+2}}\, \mathrm{d}z.$$

Also erhalten wir

$$a_n = \frac{g^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} \overset{(29)}{=} 1 \text{ für } n \geq -1.$$

Somit ergibt sich wie erwartet

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)} = \sum_{n=-1}^{\infty} z^n.$$

Analog verläuft die Herleitung für den Konvergenzring $B_{1,\infty}(0)$.

6.2. **Isolierte Singularitäten.**

Definition 6.8. Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in D$ und $f : D \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Der Punkt z_0 heißt isolierte Singularität von f. Weiter heißt diese hebbar, wenn f die Einschränkung einer auf D holomorphen Funktion ist (d.h. es gibt $g : D \to \mathbb{C}$ holomorph, so dass $g_{|D\setminus\{z_0\}} = f$).

Ist nun $f : D \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph, so gibt es ein $R > 0$ mit $B_{0,R}(z_0) \subseteq D \setminus \{z_0\}$. Nach Satz 6.5 gibt es eine eindeutige Laurent-Entwicklung um die isolierte Singularität z_0:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Definition 6.9. Die Ordnung von f an z_0 ist definiert als

$$\mathrm{ord}_{z_0}(f) := \begin{cases} +\infty & \text{wenn } a_n = 0\ \forall n \in \mathbb{Z} \\ \min\{n \in \mathbb{Z} \mid a_n \neq 0\} & \text{wenn dieses existiert} \\ -\infty & \text{sonst} \end{cases}$$

Bemerkung 6.10.

(a) Insbesondere gilt: $\mathrm{ord}_{z_0}(f) = +\infty \Leftrightarrow f = 0$ auf einer punktierten Umgebung von z_0. (Wir nehmen daher bis auf weiteres an, dass $\mathrm{ord}_{z_0}(f) \neq +\infty$.)

(b) z_0 ist hebbar $\Leftrightarrow$ f ist holomorph auf D $\Leftrightarrow$ f ist um z_0 als Potenzreihe entwickelbar $\Leftrightarrow$ $\mathrm{ord}_{z_0}(f) \geq 0$.

Proposition 6.11. *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in D$ und $f : D \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Ist $\mathrm{ord}_{z_0}(f) \neq \pm\infty$, so ist $\mathrm{ord}_{z_0}(f) \in \mathbb{Z}$ die eindeutig bestimmte Zahl $m \in \mathbb{Z}$ mit*

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z) \text{ auf } D \setminus \{z_0\}$$

für eine holomorphe Funktion $g : D \to \mathbb{C}$ mit $g(z_0) \neq 0$.

Beweis. Sei $m = \mathrm{ord}_{z_0}(f)$. Die Laurent-Entwicklung auf $B_{0,R}(z_0)$ liefert

$$f(z) = (z - z_0)^m \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m}(z - z_0)^n,$$

denn $m = \min\{n \in \mathbb{Z} \mid a_n \neq 0\}$. Insbesondere ist $a_m \neq 0$. Definiere

$$g : D \to \mathbb{C}, z \mapsto \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m}(z - z_0)^n & \text{wenn } z \in B_R(z_0) \\ \\ \frac{f(z)}{(z-z_0)^m} & \text{sonst} \end{cases}.$$

Wegen $g(z_0) = a_m \neq 0$, ist g die gesuchte Funktion.

Sei nun umgekehrt $g : D \to \mathbb{C}$ holomorph mit $g(z_0) \neq 0$ und es sei $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ für alle $z \in D \setminus \{z_0\}$. Entwickel g in eine Potenzreihe

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$$

um z_0. Dann ist

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z) = \sum_{n=m}^{\infty} b_{n-m}(z - z_0)^n$$

die Laurent-Entwicklung von f um z_0 auf $B_{0,R}(z_0)$. Es ist $\mathrm{ord}_{z_0}(f) = m$, da $b_{m-m} = b_0 = g(z_0) \neq 0$. $\square$

Die vorangegangene Proposition motiviert folgende Begrifflichkeiten:

Definition 6.12. Sei z_0 eine isolierte Singularität von f und $m := \mathrm{ord}_{z_0}(f)$.

- z_0 heißt Nullstelle von f der Ordnung m, wenn $m \in \mathbb{Z}_{>0}$;
- z_0 heißt Polstelle von f der Ordnung $-m$, wenn $m \in \mathbb{Z}_{<0}$;
- z_0 heißt wesentliche Singularität von f, wenn $m = -\infty$.

Beispiel 6.13.

(a) Die Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$ hat eine isolierte Singularität an $z_0 = 0$. Diese ist nicht hebbar, da $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$ und f in 0 nicht einmal stetig fortsetzbar ist. Nach Satz 6.5 gilt für die Koeffizienten in der Laurent-Entwicklung von f, dass

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(0)} \frac{1}{z^{n+2}} \, \mathrm{d}z$$

Nach Beispiel 4.16 ist $a_n \neq 0$ genau dann, wenn $n = -1$. Insbesondere ist also $\mathrm{ord}_0(f) = -1$, so dass 0 eine Polstelle von f der Ordnung 1 ist.

(b) Die Funktion $f(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} = z^{-2}(1+z)$ hat ebenfalls die isolierte Singularität $z_0 = 0$. Die Funktion $g(z) = (1+z)$ ist ganz und es gilt $g(z_0) = g(0) \neq 0$. Wegen $\frac{f(z)}{z^{n+1}} = \frac{1+z}{z^{n+3}}$ können wir dem Satz 6.5 schnell entnehmen, dass $\operatorname{ord}_0(f) \neq \pm\infty$. Nach Proposition 6.11 ist $\operatorname{ord}_0(f) = -2$ und z_0 eine Polstelle der Ordnung 2.

(c) Die Funktion $f(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right)$ hat eine isolierte Singularität in $z_0 = 0$. Wegen

$$\exp\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot z^{-n}$$

sind die Koeffizienten a_n für $n \leq 0$ in der Laurent-Entwicklung von f alle ungleich 0. Daher ist $\operatorname{ord}_{z_0}(f) = -\infty$, d.h. z_0 ist wesentlich und somit nach Bemerkung 6.10 insbesondere nicht hebbar.

(d) Die Funktion $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$ hat eine isolierte Singularität in $z_0 = 0$. Es ist

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

und daher ist

$$\frac{\sin(z)}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \frac{z^5}{7!} \pm \cdots$$

Daher ist $\operatorname{ord}_{z_0}(f) = -1$ und $z_0 = 0$ ist Polstelle der Ordnung 1.

(e) Wir betrachten $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ und die isolierte Singularität $z_0 = 1$. Nach Satz 6.5 gilt für die Koeffizienten der Laurent-Entwicklung:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(1)} \frac{1}{z(z-1)^{n+2}} \, \mathrm{d}z.$$

Für $n \leq -2$ ist der Integrand holomorph auf $B_\rho(1)$ und daher ist $a_n = 0$ für $n \leq -2$ nach dem Cauchyschen Integralsatz. Wegen

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}$$

ist $a_{-1} \neq 0$ und $z_0 = 1$ ist eine Polstelle.

Satz 6.14 (Riemannscher Hebbarkeitssatz)**.** *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in D$ und $f : D \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Ist f auf einer punktierten Umgebung $B_{0,R}(z_0)$ beschränkt, so ist die isolierte Singularität z_0 hebbar.*

Beweis. Sei $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ die Lauerent-Entwicklung von f um z_0 auf $B_{0,R}(z_0)$. Nach Voraussetung gibt es ein $M > 0$ mit

$$|f(z)| \leq M \ \forall z \in B_{0,R}(z_0).$$

Nach Satz 6.5 gilt für die Koeffizienten a_n der Laurent-Entwicklung:

$$\begin{aligned} |a_n| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}z \right| \\ &\overset{(4.30)}{\leq} \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \frac{M}{r^{n+1}} = \frac{M}{r^n} \end{aligned}$$

für jedes $n \in \mathbb{Z}$ und alle $r \in (0, R)$. Mit $r \to 0$ erhalten wir $a_n = 0$ für alle $n < 0$. Nach Bemerkung 6.10 (b) ist z_0 hebbar □

Satz 6.15 (Casorati-Weierstraß)**.** *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in D$ und $f : D \backslash \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann sind äquivalent:*

(a) z_0 ist eine wesentliche Singularität;
(b) für jede Umgebung U von z_0 mit $U \subseteq D$ ist $f(U \setminus \{z_0\})$ dicht in $\mathbb{C}$.

Proof. "$(a) \Rightarrow (b)$" Angenommen $f(U \setminus \{z_0\})$ ist **nicht** dicht in $\mathbb{C}$. Dann existieren $w \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ mit $B_r(w) \cap f(U \setminus \{z_0\}) = \varnothing$, d.h.

$$|f(z) - w| \geq r \ \forall z \in U \setminus \{z_0\}.$$

Somit ist die Funktion

$$g : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}, \ z \mapsto \frac{1}{f(z) - w}$$

wohldefiniert und durch $\frac{1}{r}$ nach oben beschränkt. Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz 6.14 lässt sich g auf ganz U holomorph fortsetzen. Daher hat $f(z) = w + \frac{1}{g(z)}$ entweder eine hebbare Singularität in z_0 (falls $g(z_0) \neq 0$) oder eine Polstelle (falls $g(z_0) = 0$) der Ordnung $\operatorname{ord}_{z_0}(g)$. Ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass z_0 wesentlich ist.

"$(b) \Rightarrow (a)$" Angenommen z_0 ist **nicht** wesentlich. Dann ist z_0 entweder hebbar und es gilt $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$. Oder z_0 ist eine Polstelle von f und $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$. In beiden Fällen erhalten wir, dass $f(U \setminus \{z_0\})$ für eine genügend kleine Umgebung U nicht dicht in $\mathbb{C}$ ist.

Hier wollen wir noch einmal etwas genauer argumentieren. Ist z_0 hebbar, so exisitiert der Grenzwert in $\mathbb{C}$, d.h. $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w \in \mathbb{C}$. Zu gegebenem $\epsilon > 0$ finden wir also ein $\delta > 0$, so dass z mit $|z - z_0| < \delta$ gilt: $|f(z) - w| < \epsilon$. Also betrachten wir die Umgebung $U := B_\delta(z_0)$. Dann liegen aber alle Elemente aus $f(U \setminus \{z_0\})$ in $B_\epsilon(w)$, d.h. sicher nicht dicht. Auf den Fall, dass z_0 eine Polstelle und somit $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$ gilt, gehen wir im folgenden Abschnitt genauer ein. □

6.3. **Mehr zu Polstellen.** Der Hebbarkeitssatz sagt uns (beachte, dass hier nach Definition einer hebbaren Singularität sogar die Äquivalenz der Aussage gilt), dass eine Singularität z_0 von f genau dann hebbar ist, wenn f auf einer punktierten Umgebung beschränkt ist. Folglich gilt dies nicht für Polstellen. Ist z_0 jedoch eine Polstelle der Ordnung $m \in \mathbb{N}$, so ist zumindest $(z - z_0)^m f(z)$ auf einer punktierten Umgebung von z_0 beschränkt.

Proposition. Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in D$, $f : D \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph und $m \in \mathbb{N}$. Dann sind äquivalent:

(a) f hat in z_0 eine Polstelle der Ordnung m;
(b) es gibt eine offene Umgebung $U \subseteq D$ von z_0 und eine holomorphe Funktion $h : U \to \mathbb{C}$ mit $h(z) \neq 0$ für $z \in U \setminus \{z_0\}$ und z_0 Nullstelle der Ordnung m, so dass $f = \frac{1}{h}$ in $U \setminus \{z_0\}$;
(c) auf einer punktierten Umgebung von z_0 gilt

$$M_1 \cdot \frac{1}{|z - z_0|^m} \leq |f(z)| \leq M_2 \cdot \frac{1}{|z - z_0|^m}$$

mit positiven Konstanten M_1 und M_2.

Beweis. Dies ist im Wesentlichen [RS, Satz 10.1.2], wobei wir die Funktion h aus Proposition 6.11 erhalten. □

Obige Bemerkung sagt uns also, dass Polstellen grundsätzlich aus Nullstellen durch "Kehrwert-Bildung" entstehen. Ist z_0 eine Polstelle von f der Ordnung m, so gibt es nach Proposition 6.11 eine holomorphe Funktion $g : D \to \mathbb{C}$ mit $g(z_0) \neq 0$ und

$$f(z) = (z - z_0)^{-m} g(z).$$

Es gilt also

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty.$$

Wir schreiben hierfür auch einfach $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$ und sagen, dass $f(z)$ für $z \to z_0$ gegen ∞ konvergiert.

Weiter ist dann also

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty \ \Leftrightarrow \ \lim_{z \to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0.$$

Daher folgt aus obiger Proposition:

Proposition. Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in D$ und $f : D \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann hat f genau dann eine Polstelle in z_0, wenn $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

6.4. **Der Residuensatz.** Wir wollen uns jetzt eine allgemeine Integralformel $\int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z$ für eine holomorphe Funktion f mit endlich vielen Singularitäten erarbeiten. Diese wird insbesondere alle bisherigen Integralformeln (wie etwa die Cauchysche Integralformel) verallgemeinern.

Definition 6.16. Seien $z_0 \in \mathbb{C}$ und γ ein geschlossener Weg in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. Dann heißt

$$\operatorname{ind}_{z_0}(\gamma) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - z_0}\, \mathrm{d}z$$

der Index oder die Umlaufzahl von γ um z_0.

Bemerkung 6.17. Die Homotopieinvarianz des Wegintegrals impliziert, dass zwei in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ homotope geschlossene Wege dieselbe Umlaufzahl um z_0 haben. Insbesondere hat ein in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ nullhomotoper geschlossener Weg die Umlaufzahl 0 um z_0.

Übung 6.18. Es ist $\operatorname{ind}_{z_0}(\gamma) \in \mathbb{Z}$ (siehe Blatt 6, Aufgabe 3).

Beispiel 6.19. Sei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto c + r\exp(it)$. Dann ist $\operatorname{ind}_{z_0}(\gamma) = 1$ für alle $z_0 \in B_r(c)$ und $\operatorname{ind}_{z_0}(\gamma) = 0$ für alle $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_r(c)}$.

Der nächste Satz rechtfertigt die Begrifflichkeiten in der vorherigen Definition. Ohne Einschränkung betrachten wir den Fall $z_0 = 0$.

Satz 6.20. *Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ein geschlossener Weg, der die negative Halbachse $\mathbb{R}_{<0}$ genau $(n+m)$-mal kreuzt: n-mal positiv (von oben nach unten) und m-mal negativ (von unten nach oben). Dann ist $\operatorname{ind}_0(\gamma) = n - m \in \mathbb{Z}$.*

Beweis. Wegen der Homotopieinvarianz des Wegintegrals 4.34 können wir γ durch einen homotopen Weg ersetzen. Die Abbildung

$$H : [a,b] \times [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\},\ (t,s) \mapsto s\frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|} + (1-s)\gamma(t)$$

liefert, dass γ und die Projektion von γ auf die Einheitskreisline, d.h. γ und der Weg

$$\gamma' : [a,b] \to \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}, t \mapsto \frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|}$$

frei homotop sind. Insbesondere gilt also $\mathrm{ind}_0(\gamma) = \mathrm{ind}_0(\gamma')$.

Seien nun $a =: t_0 < t_1 < \ldots < t_r < t_{r+1} =: b$ derart, dass γ' in den $\gamma'(t_i)$'s die negative reelle Achse $\mathbb{R}_{<0}$ kreuzt. Dann ist

$$\begin{aligned}\mathrm{ind}_0(\gamma') &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\gamma'_{|[a,t_1]}} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z + \sum_{i=1}^{r-1}\int_{\gamma'_{|[t_i,t_{i+1}]}} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma'_{|[t_r,b]}} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z\right).\end{aligned}$$

Sind die Kreuzungsrichtungen in $\gamma'(t_i)$ und $\gamma'(t_{i+1})$ entgegengesetzt, so ist $\gamma'_{|[t_i,t_{i+1}]}$ homotop zum trivialen Weg. Insbesondere ist $\int_{\gamma'_{|[t_i,t_{i+1}]}} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = 0$.

Sind die Kreuzungsrichtungen in $\gamma'(t_i)$ und $\gamma'(t_{i+1})$ gleich, so ist $\gamma'_{|[t_i,t_{i+1}]}$ homotop zur einfachen Kreislinie (in positiver oder negativer Orientierung) um 0, d.h. $\int_{\gamma'_{|[t_i,t_{i+1}]}} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \pm 2\pi i$ nach Beispiel 4.16. Insgesamt bleiben also $n-m$ positive oder $m-n$ negative Umläufe um 0. Daher erhalten wir

$$\mathrm{ind}_0(\gamma) = \frac{1}{2\pi i}(\pm 2\pi i(\pm(n-m))) = n - m.$$

□

Beispiel 6.21. Für den Weg in Abbildung 10 haben wir zwei negative und eine positive Kreuzung mit $\mathbb{R}_{<0}$. Daher ist die Umlaufzahl dieses Weges -1.

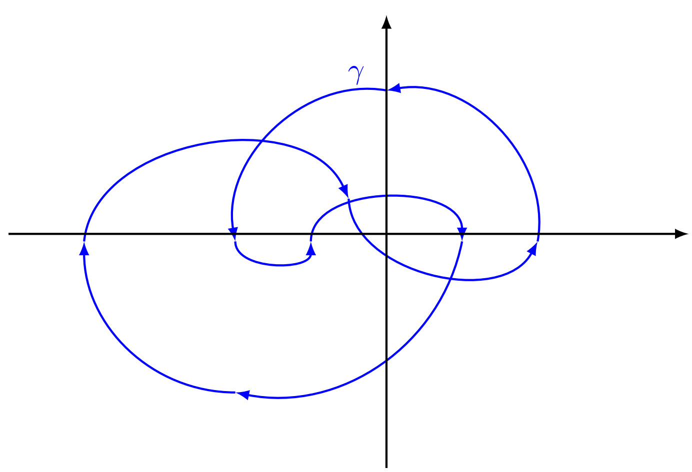


Abbildung 10. Umlaufzahl: $\mathrm{ind}_0(\gamma) = 0$

Bemerkung 6.22. Der vorherige Satz ist allgemeiner auf einen beliebigen Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ (und nicht nur 0) anwendbar. In diesem Fall kann man einen beliebigen Strahl benutzen, solange folgendes gegeben ist: Der Strahl geht von z_0 aus, er hat nur endlich viele Schnittpunkte mit dem Weg und diese Schnittpunkte kreuzen den Strahl (und berühren ihn nicht nur).

Bemerkung 6.23 (Ausblick: Topologie)**.** In Bemerkung 6.17 gilt sogar die Umkehrung, d.h.: Ein geschlossener Weg γ in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ ist genau dann nullhomotop, wenn $\operatorname{ind}_{z_0}(\gamma) = 0$.

(In der Topologie zeigt man, dass die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{z_0\})$ isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist und dieser Isomorphismus ist gerade durch ind_{z_0} gegeben.)

Sei
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$
die Laurent-Entwicklung einer holomorphen Funktion f um die isolierte Singularität z_0 auf der punktierten Kreisscheibe $B_{0,R}(z_0)$. Nach Beispiel 4.16 ist
$$\int_\gamma (z - z_0)^n \, \mathrm{d}z = 0$$
für jeden geschlossenen Weg γ um z_0 und alle $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$. Daher ist in der Berechnung von
$$\int_\gamma f(z) \, \mathrm{d}z = \int_\gamma \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \, \mathrm{d}z$$
nur der Koeffizient a_{-1} relevant.

Definition 6.24. Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in D$, $f : D \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph und
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$
die Laurent-Entwicklung von f um z_0 auf $B_{0,R}(z_0) \subseteq D$ für ein $R > 0$. Dann heißt
$$\operatorname{res}_{z_0}(f) := a_{-1}$$
das Residuum von f um z_0.

Beispiel 6.25. Ist die isolierte Singularität hebbar, d.h. f in z_0 holomorph fortsetzbar, so ist $\operatorname{res}_{z_0}(f) = 0$. Die Umkehrung gilt nicht. Betrachte zum Beispiel $f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^2}$.

Lemma 6.26. Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in D$ und $f, g : D \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt:

(a) $\operatorname{res}_{z_0}(\alpha f + \beta g) = \alpha \operatorname{res}_{z_0}(f) + \beta \operatorname{res}_{z_0}(g)$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

(b) Ist z_0 Polstelle der Ordnung höchstens $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ (d.h. $-m \leq \operatorname{ord}_{z_0}(f)$), so ist
$$\operatorname{res}_{z_0}(f) = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \lim_{z \to z_0} ((z - z_0)^m f(z))^{(m-1)}.$$

Beweis. Wir lassen Teil (a) als Übung.

Zu (b): Betrachte die Laurent-Entwicklung von f auf $B_{0,R}(z_0) \subseteq D$:
$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Dann ist

$$(z-z_0)^m f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n+m}.$$

Also

$$((z-z_0)^m f(z))^{(m-1)} = a_{-1}(m-1)(m-2)\cdots 1 + a_0 m(m-1)\cdots 2\cdot(z-z_0)+\cdots$$

Der Limes $z \to z_0$ liefert die Behauptung. □

Lemma 6.27. Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in D$ und $f, g : D \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(z_0) \neq 0$, $g(z_0) = 0$ und $g'(z_0) \neq 0$. Dann hat $\frac{f}{g}$ eine einfache Polstelle in z_0 und es gilt

$$\operatorname{res}_{z_0}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Beweis. Wegen $g(z_0) = 0$ ist

$$g'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{g(z)}{z-z_0}.$$

Also erhalten wir

$$\lim_{z\to z_0} (z-z_0)\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)} \neq 0.$$

Somit ist z_0 eine Polstelle erster Ordnung und nach Teil (b) von Lemma 6.26 ist

$$\operatorname{res}_{z_0}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)},$$

wie behauptet. □

Satz 6.28 (Residuensatz)**.** *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und einfach zusammenhängend, $z_1, \ldots z_m \in D$ endlich viele verschiedene Punkte und $f : D \setminus \{z_1, \ldots, z_m\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt für jeden geschlossenen Weg γ in $D \setminus \{z_1, \ldots, z_m\}$:*

$$\int_\gamma f(z)\ dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname{ind}_{z_k}(\gamma) \operatorname{res}_{z_k}(f).$$

Beweis. Für $k = 1, \ldots, m$ definiere f_k^- als Haupt- und f_k^+ als Nebenteil der Laurent-Entwicklung von f auf einer punktierten Umgebung von z_k:

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n^{(k)}(z-z_k)^n}_{=f_k^-(z)} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)}(z-z_k)^n}_{=f_k^+(z)}.$$

Jeder Hauptteil f_k^- konvergiert auf ganz $D\setminus\{z_k\}$ (denn er konvergiert für alle z mit $|z-z_k| > 0$). Daher ist die Funktion

$$g : D \setminus \{z_1, \ldots, z_m\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto f(z) - f_1^-(z) - \cdots - f_m^-(z)$$

holomorph und per Konstruktion in allen z_k's holomorph fortsetzbar: Lokal um eine isoloierte Singularität z_k gilt ja

$$g(z) = \underbrace{f(z) - f_k^-(z)}_{=f_k^+(z)} - f_1^-(z) - \cdots f_{k-1}^-(z) - f_{k+1}^-(z) - \cdots - f_m^-(z)$$

und in diesem Ausdruck sind alle Summanden holomorph in z_k. Somit ist g holomorph auf ganz D. Da D einfach zusammenhängend ist, ist der geschlossene Weg γ nullhomotop in D. Nach Proposition 4.40 und der Homotopieinvarianz des Wegintegrals erhalten wir

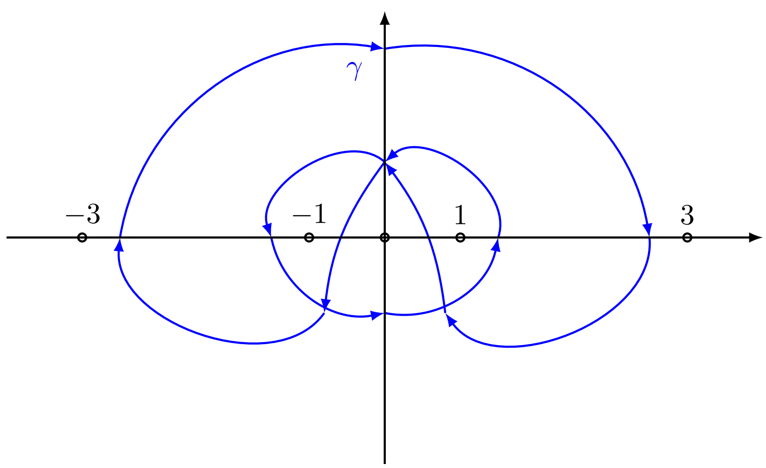
$$\begin{aligned} 0 = \int_\gamma g(z)\ \mathrm{d}z &= \int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z - \sum_{k=1}^{m} \int_\gamma f_k^-(z)\ \mathrm{d}z \\ &= \int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z - \sum_{k=1}^{m} \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n^{(k)} \int_\gamma (z-z_k)^n\ \mathrm{d}z \\ &= \int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z - \sum_{k=1}^{m} a_{-1}^{(k)} \cdot 2\pi i \cdot \mathrm{ind}_{z_k}(\gamma), \end{aligned}$$

nach Definition der Umlaufzahl und da nach Beispiel 4.16 gilt, dass $\int_\gamma (z-z_0)^n\ \mathrm{d}z = 0$ für $n < -1$. Mit der Definition des Residuums erhalten wir also

$$\int_\gamma f(z) = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \mathrm{res}_{z_k}(f)\, \mathrm{ind}_{z_k}(f).$$

□

Beispiel 6.29. Wir betrachten den Weg γ wie in folgender Abbildung dargestellt.



Nach Satz 6.20 haben wir

$$\mathrm{ind}_0(\gamma) = 1,\ \mathrm{ind}_{-1}(\gamma) = 0 = \mathrm{ind}_1(\gamma).$$

Wir wollen $\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z$ für die Funktion

$$f(z) = \frac{\exp\left(\frac{1}{z^2-1}\right)}{\sin(z)}$$

bestimmen. Die isolierten Singularitäten dieser Funktion liegen in $-1, 1$ und $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) vor. Vom Weg γ sind jedoch nur $-1, 0, 1$ betroffen. Nach dem Residuensatz gilt

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z &= 2\pi i(\mathrm{ind}_{-1}(\gamma)\,\mathrm{res}_{-1}(f) + \mathrm{ind}_0(\gamma)\,\mathrm{res}_0(f) + \mathrm{ind}_1(\gamma)\,\mathrm{res}_1(f)) \\ &= 2\pi i\,\mathrm{res}_0(f).\end{aligned}$$

Nach Lemma 6.27 ist

$$\mathrm{res}_0\left(\frac{\exp\left(\frac{1}{z^2-1}\right)}{\sin(z)}\right) = \frac{\exp\left(\frac{1}{0^2-1}\right)}{\sin'(0)} = \frac{\exp(-1)}{\cos(0)} = \frac{1}{e}.$$

Also insgesamt

$$\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{e}.$$

Definition 6.30. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und einfach zusammenhängend. Ein geschlossener Weg $\gamma : [a, b] \to D$ heißt Randkurve, wenn $\mathrm{ind}_z(\gamma) \in \{0, 1\}$ für alle $z \in D \setminus \gamma([a, b])$. Weiter heißt

$$\begin{aligned}\mathrm{Int}(\gamma) &:= \{z \in D \setminus \gamma([a, b]) \mid \mathrm{ind}_z(\gamma) = 1\} \\ \mathrm{Ext}(\gamma) &:= \{z \in D \setminus \gamma([a, b]) \mid \mathrm{ind}_z(\gamma) = 0\}\end{aligned}$$

das Innere bzw. das Äußere von γ

Folgerung 6.31 (Residuensatz für Randkurven)**.** *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und einfach zusammenhängend, $z_1, \ldots, z_m \in D$ endlich viele Punkte und $f : D \setminus \{z_1, \ldots, z_m\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Ist $\gamma : [a, b] \to D$ eine Randkurve mit $z_1, \ldots, z_m \notin \gamma([a, b])$, so gilt*

$$\int_\gamma f(z)\ dz = 2\pi i \sum_{z \in Int(\gamma)} \mathrm{res}_z(f).$$

Beweis. Beachte, dass obige Summe endlich ist, da $\mathrm{res}_z(f) = 0$ für jeden nicht-singulären Punkt z (denn in diesen Punkten ist f holomorph, d.h. in eine Potenzreihe entwickelbar). Die Behauptung folgt jetzt direkt aus dem Residuensatz, da $\mathrm{ind}_z(f) = 1$ für $z \in \mathrm{Int}(\gamma)$ und $\mathrm{ind}_z(f) = 0$ für $z \notin \mathrm{Int}(\gamma)$. □

6.5. **Anwendungen des Residuensatzes.**

6.5.1. *Berechnung uneigentlicher reeller Integrale.*

Ziel: Wir wollen uneigentliche reelle Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(x)\ \mathrm{d}x$$

mit Hilfe komplexer Methoden bestimmen. Dazu werden wir sicher brauchen, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Einschränkung einer holomorphen Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ mit $\mathbb{R} \subseteq D$ ist.

Bemerkung 6.32. Zunächst einmal ist nicht klar, warum das uneigentliche Integral als Grenzwert $r \to \infty$ der beiden symmetrischen Integrationsgrenzen r und $-r$ existiert. Nach [GdM, Kapitel 8.6] ist das uneigentliche Integral definiert als

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \mathrm{d}x := \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{c} f(x)\ \mathrm{d}x + \lim_{r\to\infty} \int_{c}^{r} f(x)\ \mathrm{d}x,$$

wobei beide Grenzwerte auf der rechten Seite existieren müssen und c eine beliebige Zwischenstelle ist. Unter gewissen Voraussetzungen, die wir später machen (f ist rational vom Grad ≤ -2 und f hat keine reellen Polstellen), gilt dann aber tatsächlich

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Für Details sei auf das Skript von Andreas Gathmann verwiesen [Gat, Bemerkung 12.2 (b) und Lemma 12.3].

Idee: Wir fassen das reelle Intervall $[-r,r]$ als Weg von $-r$ nach r auf der reellen Achse in der komplexen Ebene auf. Dann betrachten wir den Weg

$$\Gamma_r := [-r,r] + \gamma_r,$$

wobei

$$\gamma_r : [0,\pi] \to \mathbb{C},\ t \mapsto r\exp(it).$$

Siehe dazu auch Abbildung 11. Insbesondere ist Γ_r eine Randkurve.

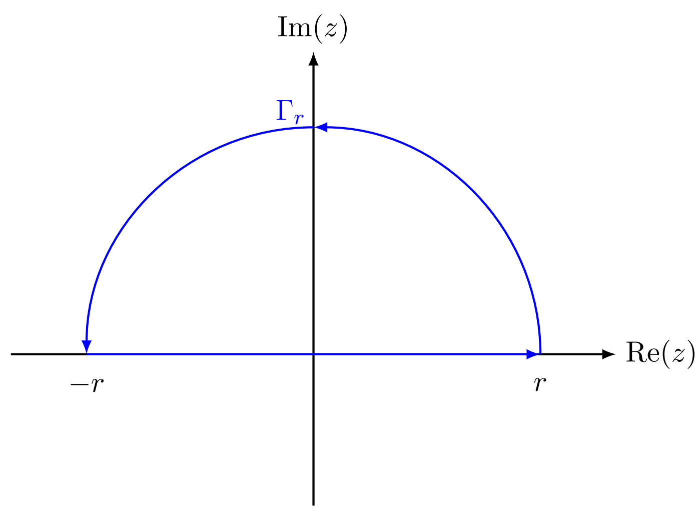


Abbildung 11. Der Weg Γ_r

Gilt nun weiter, dass

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} f(z)\ \mathrm{d}z = 0,$$

so erhalten wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{r\to\infty} \int_{\Gamma_r} f(z)\ \mathrm{d}z.$$

Hat f in der oberen Halbebene

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$$

nur endlich viele isolierte Singularitäten, so werden wir mit Hilfe von Folgerung 6.31 sehen, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{z\in\mathbb{H}} \mathrm{res}_z(f).$$

Definition 6.33. Sei $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ eine rationale Funktion. Dann heißt

$$\deg(f) := \deg(p) - \deg(q)$$

der **Grad** von f.

Für unsere Anwendung auf uneigentliche reelle Integrale betrachten wir nun eine rationale Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ mit $\deg(f) \leq -2$ (d.h. $\deg(p) + 2 \leq \deg(q)$) und wir nehmen an, dass $f(x)$ keine Polstellen auf der reellen Achse habe.

Wir wählen den Radius r groß genug, so dass alle Polstellen von f in $\mathbb{H}$ in $\mathrm{Int}(\Gamma_r)$ liegen. Siehe auch Abbildung 12.

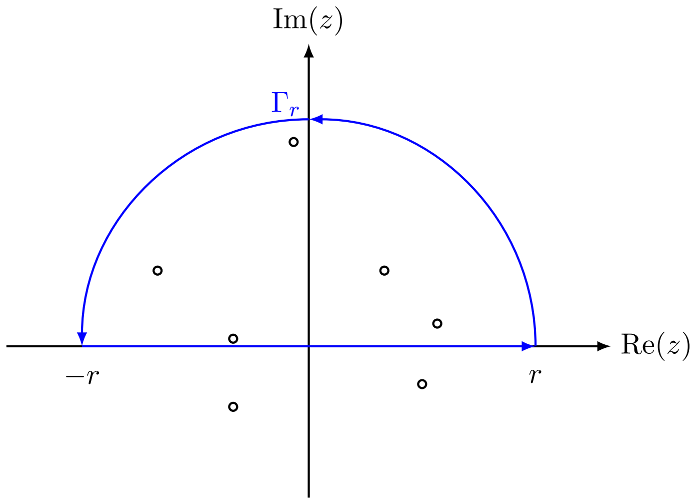


Abbildung 12. Polstellen in $\mathbb{H}$

Die Folgerung 6.31 liefert uns

$$\int_{-r}^{r} f(z)\ \mathrm{d}z + \int_{\gamma_r} f(z)\ \mathrm{d}z = \int_{\Gamma_r} f(z)\ \mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{z \in \mathrm{Int}(\Gamma_r)} \mathrm{res}_z(f). \tag{30}$$

Mit Lemma 4.30 erhalten wir

$$\Big| \int_{\gamma_r} f(z)\ \mathrm{d}z \Big| \leq L(\gamma_r) \cdot \max_{z \in \gamma_r([0,\pi])} |f(z)| = \pi r \cdot \max_{z \in \gamma_r([0,\pi])} |f(z)|. \tag{31}$$

Wegen $\deg(q) \geq \deg(p) + 2$ folgt

$$\lim_{|z| \to \infty} z f(z)\ \mathrm{d}z = 0.$$

M.a.W.: Zu beliebigem $\epsilon > 0$ gibt es ein $\rho > 0$, so dass für $|z| \geq \rho$ gilt, dass $|zf(z)| < \frac{\epsilon}{\pi}$. Also

$$|f(z)| < \frac{\epsilon}{\pi |z|}.$$

Aus (31) erhalten wir für $r \geq \rho$, dass

$$\Big| \int_{\gamma_r} f(z)\ \mathrm{d}z \Big| < \pi r \cdot \frac{\epsilon}{\pi r} = \epsilon$$

und somit

$$\lim_{r\to\infty}\int_{\gamma_r} f(z)\ \mathrm{d}z = 0. \tag{32}$$

Also erhalten wir insgesamt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{\Gamma_r} f(z)\ \mathrm{d}z \overset{(6.31)}{=} 2\pi i \sum_{z\in\mathrm{Int}(\Gamma_r)} \mathrm{res}_z(f) \tag{33}$$

Bei der zweiten Gleichheit benutzen wir hier (32) und die Homotopieinvarianz des Wegintegrals.

Beispiel 6.34. Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ wollen wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^n}\ \mathrm{d}x$$

berechnen. Der Integrand hat keine Polstellen auf der reellen Achse und den Grad -2n. Wir können also die Formel (33) zur Berechnung verwenden. Dabei werden lediglich die komplexen Polstellen einen Beitrag zur Summe $\sum_{z\in\mathrm{Int}(\Gamma_r)} \mathrm{res}_z(f)$ leisten. Für alle anderen Punkte verschwindet das Residuum. Wegen

$$\frac{1}{(z^2+1)^n} = \frac{1}{(z+i)^n(z-i)^n} \tag{34}$$

gibt es nur die beiden Polstellen $\pm i$. Nur die Polstelle $+i$ liegt in $\mathbb{H}$. Die Ordnung der Polstelle $+i$ ist n. Nach Teil (b) von Lemma 6.26 ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{res}_i\left(\frac{1}{(z^2+1)^n}\right) &= \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to i}\left((z-i)^n\frac{1}{(z^2+1)^n}\right)^{(n-1)} \\
&\overset{(34)}{=} \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to i}\left(\frac{1}{(z+i)^n}\right)^{(n-1)} \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to i}(-n)(-n-1)\cdots(-2n+2)(z+i)^{-2n+1} \\
&= \frac{1}{(n-1)!}(-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!}(2i)^{-2n+1} \\
&= -\frac{i}{2^{2n-1}}\binom{2n-2}{n-1}
\end{aligned}$$

Mit der Formel (33) erhalten wir also

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^n}\ \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2^{2n-2}}\binom{2n-2}{n-1}.$$

Das vorherige Beispiel hätten wir auch alleine mittels reeller Integration berechnen können (wenngleich mit mehr Aufwand). Besteht der Integrand jedoch aus einer rationalen Funktion und einem zusätzlichen Faktor $\sin(x)$ oder $\cos(x)$, so ist dies in der Regel nicht mehr möglich. Wegen

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(ix)\ \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(x)\ \mathrm{d}x + i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(x)\ \mathrm{d}x$$

für eine reellwertige Funktion $f(x)$, werden beide Fälle durch den folgenden Satz behandelt:

Satz 6.35. *Sei f eine reelle rationale Funktion mit* $\deg(f) \leq -2$ *und f habe keine Polstellen auf der reellen Achse. Dann gilt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(ix)\ dx = 2\pi i \sum_{z\in\mathbb{H}} \operatorname{res}_z(f(z)\exp(iz))$$

Der Beweis erfolgt sehr analog zu der Herleitung der Formel (33). Daher lassen wir ihn zur Übung.

Beispiel 6.36. Wir wollen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2}\ \mathrm{d}x$$

berechnen. Zunächst stellen wir fest, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2}\ \mathrm{d}x = \operatorname{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ix)}{1+x^2}\ \mathrm{d}x\right).$$

Da i eine Polstelle der Ordnung 1 ist, gilt wegen Lemma 6.26, dass

$$\operatorname{res}_i\left(\frac{\exp(iz)}{1+z^2}\right) \overset{(34)}{=} \lim_{z\to i}(z-i)\frac{\exp(iz)}{(z+i)(z-i)} = \frac{\exp(-1)}{2i} = \frac{1}{2ie}.$$

Nach Satz 6.35 ist daher

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ix)}{1+x^2}\ \mathrm{d}x = 2\pi i \cdot \frac{1}{2ie} = \frac{\pi}{e}$$

Isngesamt also auch

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2}\ \mathrm{d}x = \operatorname{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ix)}{1+x^2}\ \mathrm{d}x\right) = \frac{\pi}{e}.$$

6.6. **Abzählen von Null- und Polstellen.** Wir wollen mit Hilfe des Residuensatzes die Null- und Polstellen einer Funktion abzählen.

Lemma 6.37. Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in D$ und $f : D \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Ist $\operatorname{ord}_{z_0}(f) \neq \pm\infty$, so ist

$$\operatorname{ord}_{z_0}(f) = \operatorname{res}_{z_0}\left(\frac{f'}{f}\right)$$

Beweis. Wir setzen $m := \operatorname{ord}_{z_0}(f) \in \mathbb{Z}$. Nach Proposition 6.11 gibt es eine auf D holomorphe Funktion g mit $g(z_0) \neq 0$, so dass

$$f(z) = (z-z_0)^m g(z) \tag{35}$$

auf $D \setminus \{z_0\}$. Also ist

$$f'(z) \overset{(35)}{=} m(z-z_0)^{m-1}g(z) + (z-z_0)^m g'(z).$$

Damit folgt

$$\frac{f'(z)}{f(z)} \overset{(35)}{=} \frac{m}{z-z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Die Linearität des Residuums aus Lemma 6.26 liefert
$$\mathrm{res}_{z_0}\left(\frac{f'}{f}\right) = m \cdot \underbrace{\mathrm{res}_{z_0}\left(\frac{1}{z-z_0}\right)}_{=1} + \underbrace{\mathrm{res}_{z_0}\left(\frac{g'}{g}\right)}_{=0} = m,$$
da $\frac{g'}{g}$ holomorph ist, d.h. in eine Potenzreihe entwickelbar ist. □

Satz 6.38 (Abzählen von Null- und Polstellen)**.** *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und einfach zusammenhängend, $z_1, \ldots, z_m \in D$ endlich viele Punkte und $f : D \setminus \{z_1, \ldots, z_m\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Ist $\gamma : [a,b] \to D$ eine Randkurve in D, welche die Null- und Polstellen von f nicht trifft, so gilt*
$$\sum_{z \in Int(\gamma)} \mathrm{ord}_z(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \mathrm{ind}_0(f \circ \gamma).$$
M.a.W.: Die Anzahl der Null- und Polstellen mit Vielfachheiten von f ist gleich der Umlaufzahl um 0 von $f \circ \gamma$.

Beweis. Es ist
$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z &\overset{(6.31)}{=} \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i \sum_{z \in \mathrm{Int}(\gamma)} \mathrm{res}_z\left(\frac{f'}{f}\right) \\ &\overset{(6.37)}{=} \sum_{z \in \mathrm{Int}(\gamma)} \mathrm{ord}_z(f).\end{aligned}$$
Um die zweite behauptete Gleichheit zu sehen, substituiere $w := f(z)$. Dann ist
$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z &= \frac{1}{2\pi i}\int_{f\circ\gamma} \frac{1}{w}\,\mathrm{d}w \\ &\overset{(6.16)}{=} \mathrm{ind}_0(f \circ \gamma).\end{aligned}$$
□

Satz 6.39 (Rouché)**.** *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und einfach zusammenhängend, $f, g : D \to \mathbb{C}$ holomorph und $\gamma : [a,b] \to D$ eine Randkurve. Gilt*
$$|f(z) - g(z)| < |g(z)| \text{ für alle } z \in \gamma([a,b])$$
so ist
$$\sum_{z \in Int(\gamma)} \mathrm{ord}_z(f) = \sum_{z \in Int(\gamma)} \mathrm{ord}_z(g).$$

Beweis. Für $t \in [0,1]$ betrachte die holomorphe Funktion
$$h_t : D \to \mathbb{C},\ z \mapsto g(z) + t(f(z) - g(z)).$$
Es ist $h_0 = g$ und $h_1 = f$. Für alle $t \in [0,1]$ und alle $z \in \gamma([a,b])$ gilt
$$\begin{aligned}|h_t(z)| &= |g(z) + t(f(z) - g(z))| \\ &\geq |g(z)| - |t| \cdot |f(z) - g(z)| \\ &\geq |g(z)| - |f(z) - g(z)| \overset{(\text{Vor.})}{>} 0.\end{aligned}$$

Insbesondere hat h_t also keine Nullstellen auf $\gamma([a,b]) \subseteq D$. Beachte, dass h_t holomorph auf D ist und somit keine Polstellen besitzt.

Nach Satz 6.38 zählt

$$N(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{h_t'(z)}{h_t(z)} \, \mathrm{d}z$$

die Nullstellen von h_t auf D. Da h_t stetig ist, ist $N(t)$ stetig in t. Wegen $N(t) \in \mathbb{Z}$ ist $N(t)$ dann unabhängig von t, d.h. konstant. Insbesondere ist $N(1) = N(0)$. □

Satz 6.40 (Fundamentalsatz der Algebra)**.** *Jedes nicht-konstante Polynom $f \in \mathbb{C}[z]$ besitzt eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.*

Beweis. OBdA sei der Leitkoeffizient von f gleich 1, d.h.

$$f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots a_0 \in \mathbb{C}[z]$$

und $n \geq 1$. Setze $g(z) := z^n$. Dann ist

$$f(z) - g(z) = a_{n-1}z^{n-1} + \cdots a_0,$$

also ein Polynom vom Grad $m \in \{0, \ldots, n-1\}$. Weiter gilt dann

$$\begin{aligned}|f(z) - g(z)| &= |a_m z^m + a_{m-1}z^{m-1} + \cdots a_0| \\ &= |z^m(a_m + a_{m-1}z^{-1} + \cdots + a_0 z^{-m})| \\ &= |z|^m \cdot |a_m + a_{m-1}z^{-1} + \cdots + a_0 z^{-m}|.\end{aligned}$$

Nach Blatt 3, Aufgabe 4 (b) gibt es ein $r > 0$ und $c > 1$ mit

$$|f(z) - g(z)| \leq c|z|^m \text{ für alle } |z| \geq r.$$

Sei $r' := \max(r, c+1)$ und $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C},\ t \mapsto r' \exp(2\pi i t)$ der Weg auf der Kreislinie um 0 mit Radius r'. Insbesondere ist $|z| = r' \geq r$ für alle $z \in \gamma([0,1])$ und daher gilt

$$|f(z) - g(z)| \leq c \cdot |z|^m < |z| \cdot |z|^m \leq |z|^n = |g(z)| \text{ für alle } z \in \gamma([0,1]),$$

da $r' > c > 1$. Offensichtlich hat g die Nullstelle 0 mit Vielfachheit n und diese liegt in $\mathrm{Int}(\gamma)$. Nach dem Satz von Rouche hat f aber dann auch genau n Nullstellen. (Man beachte wieder, dass f als Polynom auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph ist und keine Polstellen besitzt.) □

7. Ausblick

Hier einige Themen, die wir in dieser Vorlesung nicht behandelt haben bzw. behandeln konnten:

- komplexe Logarithmus-Funktion
- allgemeiner Cauchyscher Integralsatz
- Weierstraßsche Konvergenzsätze
- meromorphe Funktionen
- Fourierreihen
- Berechnung trigonometrischer Integrale mit dem Residuensatz
- Der Satz von Picard: Aus dem Satz von Casorati-Weierstraß 6.15 und dem Satz über die Gebietstreue 5.20 wissen wir, dass für eine offene Umgebung U einer wesentlichen Singularität z_0 die Menge $f(U \setminus \{z_0\})$ dicht und offen in $\mathbb{C}$ ist. Der Satz von Picard besagt nun, dass dies sogar entweder ganz $\mathbb{C}$ ist oder $\mathbb{C}$ mit Ausnahme nur eines Punktes.

References

[Bar] Mohamed Barakat, Skript zur Funktionentheorie WS 12/13, TU Kaiserslautern
http://www.algebra.mathematik.uni-siegen.de/barakat/Lehre/WS13/Funktionentheorie/
[FL] Wolfgang Fischer, Ingo Lieb, Funktionentheorie, Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2010.
[Gat] Andreas Gathmann, Skript zur Funktionentheorie WS 16/17, TU Kaiserslautern
https://www.mathematik.uni-kl.de/~gathmann/class/futheo-2016/futheo-2016.pdf
[GdM] Martin Grothaus, Sven O. Krumke, Vorlesungsskript zu Grundlagen der Mathematik I und II, TU Kaiserslautern, Sommersemester 2018.
[Koe] Konrad Königsberger, Analysis I, Springer (6. Auflage, 2004).
[Las] Caroline Lassueur, Skript zur Funktionentheorie WS 17/18, TU Kaiserslautern
https://www.mathematik.uni-kl.de/~lassueur/en/teaching/FTWS1718/FTWS1718/KA_WS_1718.pdf
[RS] Reinhold Remmert, Georg Schumacher, Funktionentheorie 1, Springer (2002).

Patrick Wegener, Technische Universität Kaiserslautern, Germany
Email address: wegener@mathematik.uni-kl.de